

解 説

ポートフォリオ理論を応用した インデックスボラティリティの検討

朝日ライフ アセットマネジメント株式会社
西山 昇

1. はじめに

現代ポートフォリオ理論では、銘柄の分散・共分散の加重和をトータルリスクと呼び、それを最小化、あるいは、一定水準にコントロールすることによりポートフォリオリスク管理を行なう。本稿においてトータルリスクとは、ポートフォリオボラティリティと同じ意味で用いている。

トータルリスクをコントロールするために構成部分の考え方を理解することが必要となる。トータルリスクは大きく2つの部分から構成されている。代表的な考え方としては、マーケットと連動して変動するマーケットリスク部分と銘柄がもつ固有要因によって変動するスペシフィックリスク部分の2つのパートによって構成されるとする考え方。また別に、銘柄分散効果によりリスクを減少させることができるアンシステムティックリスク部分と分散効果によりリスク低減効果が一定水準を超えることができない残余として捉えられるシステムティックリスク部分の2つのパートにより構成されるという考え方である。

トータルリスク 1 = マーケットリスク + スペシフィックリスク

トータルリスク 2 = システムティックリスク + アンシステムティックリスク
--

これまでの実務的な対応としては市場で取引されているマーケットインデックスを利用したマーケットリスク管理、業種等のインデックスを利用したトータルリスク管理、などが議論されてきている。運用のためのアイデアは既に多数提示されている[1][2]。本レポートでは、トータルリスクにおける相関の役割とボラティリティへの影響について検討する。

2. ポートフォリオリスクと相関

分散・共分散の構成部分の数学的な検討を次のように行う。トータルリスク σ_p の一般式を式(2.1)のように定義する[2]。分散・共分散を右辺第一項の主対角部分と右辺第二項の非主対角部分の和として表現する。

$$(2.1) \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \text{Cov}(R_i, R_j)$$

ここで、 a_i はポートフォリオ内の第 i 銘柄のウェイト、 σ_i は第 i 銘柄のボラティリティ(標準偏差)、 $\text{Cov}(R_i, R_j)$ の項は、第 i 銘柄と第 j 銘柄の共分散である。

最初の検討段階としてまったく相関を持たない銘柄でポートフォリオを構築できたと仮定して、右辺第2項をゼロと置き、式(2.1)の右辺第一項のみを残す。実務的には非現実的な仮定であるが、トータルリスクの考え方を理解するために設定する。次に残った右辺第一項の全銘柄の標準偏差をすべて同じ値 σ として等加重で組み合わせると仮定する。すると式(2.2)のように表現できる[3]。

式(2.2)はポートフォリオ理論の銘柄分散効果を示している。つまり相関がない銘柄同士の組み合わせであれば、銘柄数 N が増加するとトータルリスク σ_p が減少する。

$$(2.2) \quad \sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

次に式(2.1)に戻り右辺第2項の相関が存在するとの仮定を設定しなおす。さらに非現実的な仮定として、非主対角部分の銘柄間の相関がすべて ρ であるとした場合に式(2.1)は、式(2.3)のように表現できる。

$$(2.3) \quad \sigma_p = \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 + \rho \cdot (N + 1)}{N}}$$

ここで銘柄数Nが増加して無限大になると仮定する。すると式(2.4)のようになる。

$$(2.4) \quad \sigma_p \Rightarrow \sigma \cdot \sqrt{\rho}$$

式(2.4)から、トータルリスク σ_p を低下させるには、ポートフォリオに含まれる銘柄数Nを無限大になるように増加させた上で、組み入れる各個別銘柄のボラティリティ σ_i を小さくする、あるいは、銘柄間の相関 ρ の平均ができる限り小さくなる組み合わせを探ることだとわかる。最終的にはトータルリスクの大きさは相関係数の平方根として決定される。

実際のポートフォリオ運用においてトータルリスクをどのようにとらえることができるのかということ、これまで実務的には銘柄分散効果を中心に議論する傾向があった。つまり相関はコントロール不可能なものとして議論されてきた。その理由として考えられることは、株式で構成されたポートフォリオは、本来の特性から銘柄どうしの相関が高い傾向があるためであろう。しかし株価が急落する局面では、銘柄同士の相関が急速に高まることが観察されている。このことからリスク管理において相関に注目する必要性が議論されている[4]。

3. ボラティリティと相関

インデックスのヒストリカルボラティリティを利用してポートフォリオ相関を計測する尺度を算出する[5]。ボラティリティとは株価の変化率の標準偏差であり伝統的

なりリスク尺度である。例えばインデックスのヒストリカルボラティリティは暴落時に上昇することが観察される。株式インデックスのボラティリティの構成部分を式(3.1)のように表現する。株式インデックスの分散は、構成銘柄にウェイト付けした分散の合計とウェイト付けされた各構成銘柄間の共分散の合計を足しあわせたものであるとする。

$$(3.1) \quad \sigma_{INDEX}^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{i \neq j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

ここで a_i はインデックス内の第 i 銘柄のウェイト、 σ_i は第 i 銘柄のボラティリティであり、 ρ_{ij} は第 i 銘柄と第 j 銘柄の相関を示している。

非現実的な仮定であるが、すべての銘柄の ρ_{ij} (相関) が同じ値 ρ になると仮定して式(3.2)のように展開する。式(3.2)から ρ が減少するとINDEXのボラティリティ (σ_{INDEX}) も減少することがわかる。

$$(3.2)$$

$$\sigma_{INDEX}^2 = \sum a_i^2 \sigma_i^2 + n(n-1)\rho \sum_i \sum_{i \neq j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j$$

そこで更に ρ を求める式(3.3)に変形する。

$$(3.3)$$

$$n(n-1)\rho = \left(\sigma_{INDEX}^2 - \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 \right) / \sum_i \sum_{i \neq j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j$$

インデックス構成銘柄のポートフォリオボラティリティに注目して、株式インデックスの構成銘柄間の相関を計算する。データは、ダウ30種平均採用の30銘柄。2002年11月末の時点での指数採用30銘柄について1986年12月5日までさかのぼり、週次の株価変化率について計算する。ボラティリティは25週の株価変化率をローリングさせて計算する。

図1 ダウ平均と相関

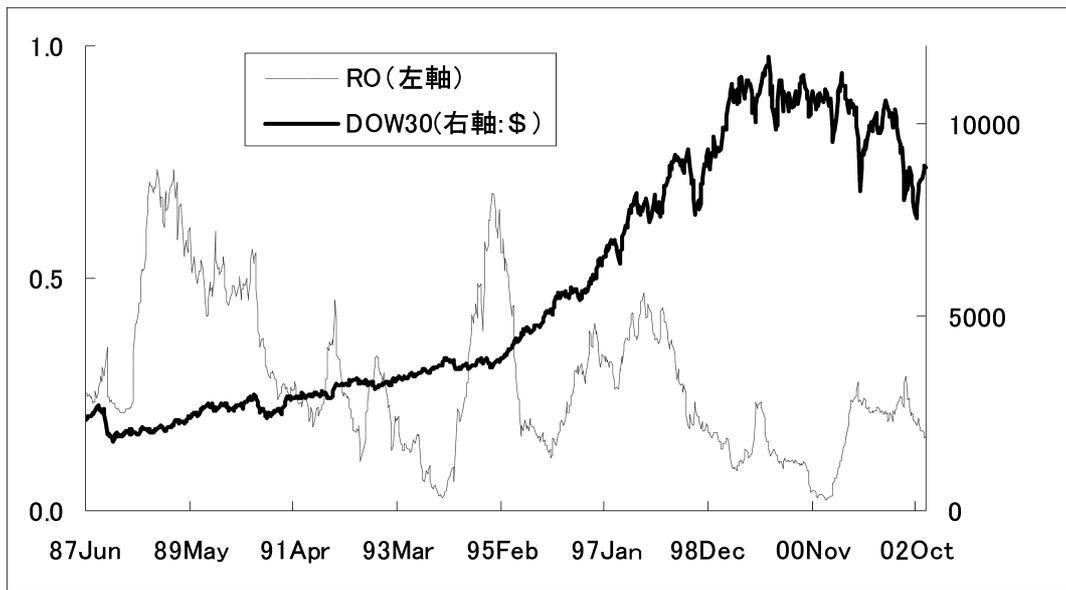


図2 ダウ平均とヒストリカルボラティリティ

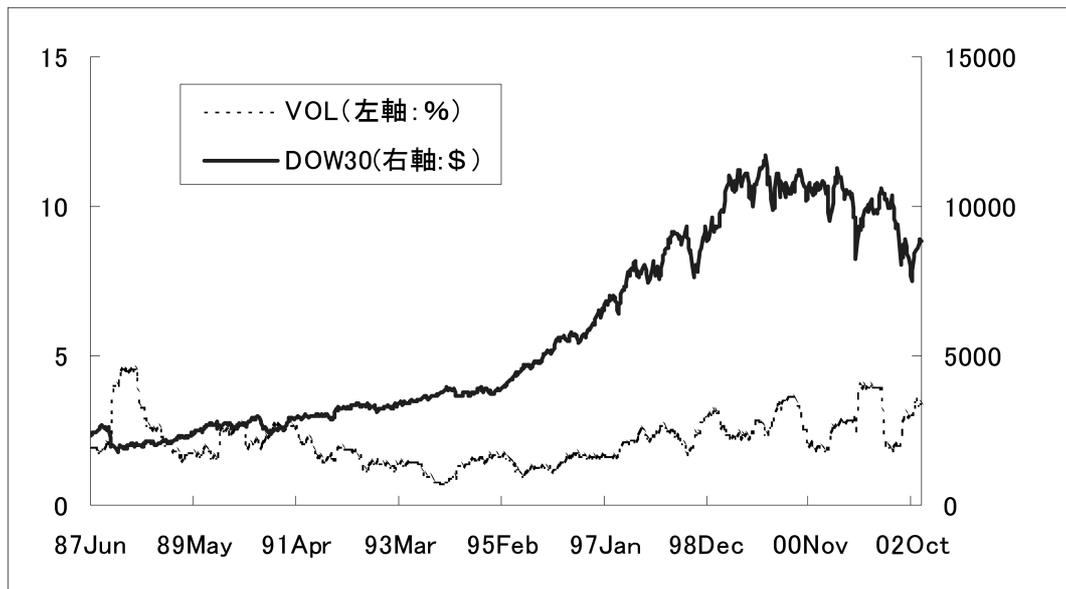


図1は、式(3.3)で計算した ρ とダウ平均を示したグラフである。図2は、ヒストリカルボラティリティと σ をグラフに示したものである。

ρ の値は1987年10月のブラックマンデーの直前に小さく、その後に急激に上昇している。逆に1994年には ρ の値がデータ期間中で最低の水準となりほぼ0となっている。

インデックスボラティリティの変動と比較するとボラティリティが安定しているときであっても相関が上昇している局面もあり、逆の局面のケースもある。ボラティリティの変動要因として相関 ρ を計算することでボラティリティの変動要因を推計することが可能である。

4 . 結論

本レポートでは、ボラティリティの変動要因をポートフォリオ理論におけるトータルリスクの構成部分の考え方から検討した。相関に注目してポートフォリオ相関をマーケットインデックスから逆に推計した。データ上の制約から現在の構成銘柄をそのまま過去にさかのぼらせて分析を行なったため、銘柄入替の効果を考慮していないことに注意が必要である。

ポートフォリオ相関を算出する目的は、下落局面を分析することにある。クラッシュ的な下落局面なのか、それとも割高感からの下落局面なのかを区別するためである。ボラティリティと相関のグラフを比較すると株価が急落する局面でボラティリティは急上昇しているのに対して相関はクラッシュ前から穏やかに上昇している。指標として利用するには、別の統計量と組み合わせる更に加工する必要があるが、ある範囲に限定すれば指標として利用可能であると考ええる。

以上

〔参考文献〕

- [1] Farrell, James L., Jr.(1974) : “Analyzing Covariation of Returns to Determine Homogeneous Stock Groupings”, Journal of Business, pp. 186-207
- [2] Farrell, James L , Jr. (1991). GUIDE TO PORTFOLIO MANAGEMENT, McGraw-Hill「野村投資顧問/訳 野村総合研究所/訳(1990). ポートフォリオ・マネジメント入門 - MPT理論とその応用 - . 日本経済新聞社
- [3] Grinold, Richard C. and Kahn, Ronald N.(1995). Active Portfolio Management”, McGraw-Hill.[明治生命特別勘定運用部/訳 日興証券アセットマネジメント本部/訳(1999). アクティブ・ポートフォリオ・マネジメント 運用戦略の計量的理論と実践. 東洋経済新報社
- [4] Harry M. Kat (2002): “THE DANGERS OF USING CORRELATION TO MEASURE DEPENDENCE”, August 19, 2002, Working Paper
- [5] Kelly, Michael (1994): “STOCK ANSWER : CORRELATION”, RISK, VOL. 7 / NO 8, AUGUST, pp. 40-43