

解 説

オプション取引データに基づいた 状態価格密度の推計について： 大阪証券取引所の事例 1

大阪大学大学院経済学研究科
助教授 齊 藤 誠*†
大阪府立大学経済学部
講師 高 木 真 吾

概 要

本論文は、Ait-Sahalia and Lo[1]が提案したノンパラメトリックな推定手法に基づきながら、大阪証券取引所で取引されている株価指数オプションの市場価格から状態価格密度を推定した実証結果を報告している。ここでいう状態価格密度(state price density)は、投資家の株価変動に対するヘッジ需要について重要な情報を提供している。特に、状態価格密度の下方の形状は、将来の株価下落に対してどの程度のプレミアムを支払う準備があるのかに関する情報を含んでいる。本論文では、状態価格密度の下方形状を正確に推定できるノンパラメトリックな手法を適用しながら、投資家のヘッジ需要を推定していく。ここでの実証結果は、ヘッジ機能を有している複雑なデリバティブ商品の価格評価や、リスク管理に応用することができる。

1 はじめに

モダン・ファイナンス理論では、状態価格密度(state price density)という概念が、複雑なペイオフ構造を持つデリバティブの価格評価や、込み入った保有ポートフォリオのリスク管理を行っていく上で、もっとも基本的な役割、すなわちビルディング・ブロックの役割を果たしている。

状態価格密度とは、ある原資産価格(本論文では、株価指数)の特定の水準について、その水準で1単位のペイ

オフが得られる基本債券の値付け情報を意味している。こうした状態価格密度には、資産価格が当該水準に到達する物理的な確率とともに、その当該水準における投資家の危険回避度合いを反映している。たとえば、株価指数が極端に下落した水準においては、その下落状態の確率的な可能性がたとえ低くても、危険回避的な投資家はその下落状態をぜひとも回避したいとすれば、株価指数が下落した水準での状態価格密度は高い値を示す可能性がある。

いいかえると、株式市場に参加している投資家の間では、株価が下落する状態に対してヘッジをしようとする需要(ヘッジ需要)がどれだけ強いのか、株価下落水準における状態価格密度の高さに反映されていることになる。したがって、ヘッジ機能を有しているデリバティブの資産価格評価や、ヘッジを旨としたリスク管理において、状態価格密度がもたらす情報はきわめて重要な役割を果たしうるのである。

しかしながら、状態価格密度を直接観察することができないために、資産価格評価やリスク管理においてリスク評価が必要な場合にも、状態価格密度が明示的に用いられることはなかった。標準的な資産価格モデルやリスク管理手法では、状態価格密度が暗黙に想定されているものの、明示的に取り扱われているわけではないのである。

実は、Ross[10]、Banz and Miller[2]、Breedon and Litzenberger[4]等が理論的に示したように、オプション価格評価関数の行使価格に関する二階微分が状態価格密度に相当することは以前より知られていた。それにもかかわらず、オプション価格評価とのエレガントな関係から状態価格密度を導出するという作業が行われてこなかったのは、オプション価格評価関数がパラメトリックに特定されるケースがきわめて限定されているからである。1970年代に発見された著名なブラック・ショールズ公式(Black and Scholes[3]、Merton[7])は、いぜんとして、パラメトリックな形が特定されているオプション

価格評価関数の数少ない事例である。オプション価格評価の関数形が特定されていなければ、上述のエレガントな関係を活用することができない。

オプション価格評価関数の理論的な導出が困難である状況に対して、Ait-Sahalia and Lo [1]は、オプション価格評価関数を理論モデルからパラメトリックに導出するのではなく、オプションの市場価格からノンパラメトリックに推定していくことを提案している。こうしてノンパラメトリックに推定されたオプション価格評価関数を得ることができれば、上述の理論的な関係から状態価格密度を数値的に導き出すことが可能となる。

本論文は、Ait-Sahalia and Lo [1]が提案した手法に沿いながら、大阪証券取引所に上場されている株価指数オプションの市場価格データからオプション価格評価関数をノンパラメトリックに推定した上で、状態価格密度を導出することを目的としている。

われわれの論文の大きな特徴は、先述したヘッジ需要に関する情報に強い興味があることから、その目的に合った形でノンパラメトリックな推計手法を適用しているところにある。ヘッジ需要の情報を適切に抽出するためには、状態価格密度関数の下方テイル(下端)の形状を正確に推定する必要がある。Ait-Sahalia and Lo [1]が用いている the Nadaraya-Watson kernel (以下、NW) に依拠した推定法では、両側の境界に近い関数の形状を正確に推定することができないことが知られている。したがって、NW推定法は、われわれの研究目的に必ずしも合致していない。

本論文では、最近のノンパラメトリックな推定手法の研究分野で Ruppert and Wand [11]が提案している the local polynomial (以下、LP) 推定法を活用していく。この推定法は、関数形状の近似において内部領域ばかりではなく、両端の境界に近い領域でも、推定のバイアスが生じない。したがって、LP推定法は、状態価格密度関数の下方テイルを正確に推定する目的に非常に適しているのである。

本論文は、次のように構成されている。第2節では状態価格密度の導出方法を説明する一方、第3節では推定方法および推定結果を報告している。第4節で結論を述べている。

2 状態価格密度の導出方法

前節で述べたように状態価格密度 (state price density) には、投資家のヘッジ需要に関する情報が含まれているが、それを直接観察することはできない。しかしながら、Ross [10], Banz and Miller [2], Breeden and Litzenberger [4]達が明らかにしたように、状態価格密度 $f_t(S_T)$ とヨーロピアン・オプション価格評価関数の間には次のような関係が成立している。

$$f_t(S_T) = \exp(\tau r_{t,\tau}) \frac{\partial^2 H(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau})}{\partial X^2} \Bigg|_{X=S_T} \quad (1)$$

ここで H は、満期が $T (\equiv t + \tau)$ 、行使価格が X 、現在の株価指数が S_t のヨーロピアン・コール・オプションの t 期における価格評価関数を示している。また、 $r_{t,\tau}$ は t 期と T 期をはさむ期間の安全利子率、 $\delta_{t,\tau}$ は同期間の配当収益率を表している。

上の関係は、もしヨーロピアン・オプション価格評価の関数形を特定することができれば、即座に状態価格密度を導出できることを示している。しかしながら、オプション価格評価関数がパラメトリックに特定できるケースがきわめて限定されていることから、ファイナンスの実証研究では、(1)式から状態価格密度を導出するということが困難であった。1970年代に発見された著名なブラック・ショールズ公式 (Black and Scholes [3], Merton [7]) は、いぜんとしてパラメトリックな形が特定されているオプション価格評価関数の数少ない事例である。

Ait-Sahalia and Lo [1]は、(1)式によって表されるオプション価格評価関数と状態価格密度の関係を活用するために、理論モデルからパラメトリックにオプション価格評価関数を導出するのではなく、オプションの市場価格

データからノンパラメトリック (nonparametric) にオプション価格評価関数を推定する手法を提案している。彼らは、ヨーロピアン・コール・オプション価格評価関数 H をノンパラメトリックに推定するために、次のようないくつかの工夫を行い、推定されたオプション価格評価関数から状態価格密度を導き出しているのである。

第 1 に、株価指数の現在水準 S_t や配当水準 $\delta_{t,\tau}$ に関する情報は、先物価格の保有コスト・モデルである

$$F_{t,\tau} = \exp(\tau(r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau}))S_t$$

の関係を通じて、先物価格の水準に集約されていると想定する。第 2 に、安全利子率 $r_{t,\tau}$ は、 t 期と T 期の間で一定しており、 r に置き換える。上の 2 つの単純化によって、オプション価格評価関数 $H(S_t, X, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau})$ は、 $H(F_{t,\tau}, X, \tau)$ という形に簡単化できる。

さらに、Ait-Sahalia and Lo [1] は、データの作成についても以下の点に関して注意を払っている。第 1 に、株価指数オプション、株価指数先物、さらには株価指数を構成している個別銘柄が別々の市場で取引されていることから、それぞれの市場価格が異なったタイミングで観察されてしまう可能性がある。たとえば、S&P500 指数先物は、the Chicago Mercantile Exchange で取引されている一方、それに対応する指数オプションは、the Chicago Board Options Exchange で取引されている。

第 2 に、オプション契約がディープ・イン・ザ・マネー (deep in the money, 以下では、DITM) になると、その契約を取引している市場の流動性が低くなり (買い手不足になり)、オプション価格が過小評価される傾向がある。その結果、プット・コール平価関係は厳密な等号で成立しなくなってしまう。たとえば、コール・オプションが DITM になると、コール価格とプット価格の関係は次のようにプット・コール平価関係から乖離してしまう。

$$H + X \exp(-\tau r) < G + F_{t,\tau} \exp(-\tau r)$$

ここで、 H (もしくは、 G) は、ヨーロピアン・コール (もしくは、プット) の市場価格を表している。

Ait-Sahalia and Lo [1] は、上述の 2 つの問題を回避するために、アット・ザ・マネーにあるプット契約とコール契約を活用することを提案している。行使価格が現在の株価指数水準にきわめて近い (アット・ザ・マネーの) コールとプットの契約価格が与えられると、指数先物価格の理論値は $F_{t,\tau}$ 、保有コストモデルである

$$\exp(\tau r) (H - G + X \exp(-\tau r))$$

から導き出すことができる。上の手続きにしたがうと、オプション市場価格のみから指数先物価格を導出できることから、指数先物価格や株価指数構成銘柄価格が異なったタイミングで観察されるという第 1 の問題を完全に回避することができる。

また、こうして導出された指数先物価格の理論値とアウト・オブ・ザ・マネー (out-of-the-money, 以下では、OTM) のプット・オプション価格をプット・コール平価関係 ($G + (F_{t,\tau} - X) \exp(-\tau r)$) に代入すると、ITM のコール・オプション価格を理論的に導き出すことができる。その結果、DITM のコール・オプション契約が過小に評価されるという第 2 の問題を回避することができる。

Ait-Sahalia and Lo [1] は、コール・オプション価格評価関数をノンパラメトリックに推計するために、the Nadaraya-Watson kernel (以下では、NW) 推定法を用いている。しかしながら、Ruppert and Wand [11] 等、ノンパラメトリック推定手法に関する最近の計量経済学的研究成果によると、当該関数のテイル (両端) の形状を正確に推計するためには、NW 推定法は決して望ましくなく、the local polynomial (以下では、LP) 推定法の方が推定バイアスがないことが明らかにされてきた。特に、われわれの興味は株価指数の下落に対するヘッジ需要、すなわち状態価格密度の下方テイルにあることから、LP 推定法の方がわれわれの研究目的に適合しているといえる。

本論文では、NW推定法とLP推定法を適用することで両者を比較するとともに、株価指数の下落に対するヘッジ需要についてはLP推定法からの情報に力点を置いて解釈を行っていく。

3 推定方法と推定結果

3.1 大阪証券取引所における株価指数オプション取引

1989年に大阪証券取引所(以下、大証)では、日本においてもっとも一般的な株価指数である日経平均株価(日経225)に関するオプション取引を開始した¹。当初、大証では、権利行使方法としてアメリカン・タイプを採用していたため、理論的に予測されるとおりプット・オプション契約に関しては早期行使されたものもあった。前節において示したヨーロッパン・オプションに関する状態価格密度とオプション価格の関係を表わす(1)式は、早期行使の可能性のあるアメリカン・オプション契約に関しては成立しておらず、その理論的含意をそのまま利用することはできない。

しかしながら、1992年6月以降に満期を迎える取引に関しては、権利行使方法がヨーロッパン・タイプに切り替えられた²。この制度変更により、われわれは、大証の株価指数オプション価格から(1)式の理論的含意を探求することができるようになったのである。したがって、われわれの実証研究では、1992年下半期以降のオプションの市場価格データを用いて状態価格密度の推定を行っていく。

大証では、行使価格をあらたな限月の取引に関して設定する際、取引開始前日の日経平均株価の値にもっとも近い150の倍数を基準に、500円刻みで上下2種類の権利行使価格が定められている。また、日経平均株価が大きく変動しても、前日の株価を上下とも少なくとも2種類の行使価格が網羅するように追加設定される。多くの取引が3ヶ月以内に満期を迎えるものに集中しており、より長い残存期間を持つオプションの取引は市場流動性が著しく低い。

前節で指摘したように、米国のオプション取引では、DITMの取引がコールもプットも過小評価される傾向がある。すなわち、プット・コール平価式は、コールかプットのいずれかがディープ・イン・ザ・マネーとなる領域では、

$$H - G + (X - F_{t,\tau}) \exp(-\tau r) = 0$$

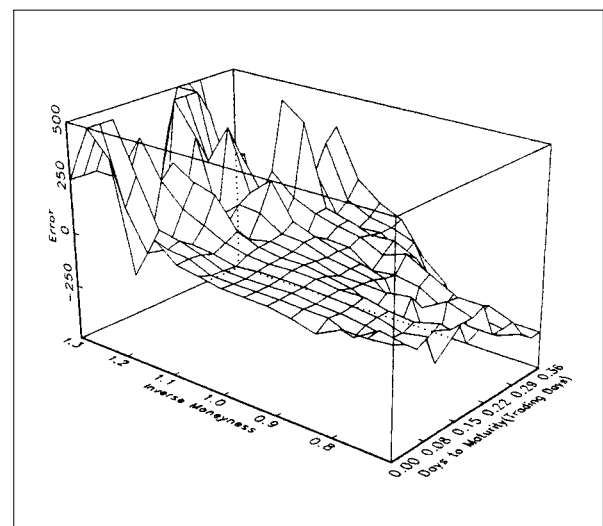
が成立していない。同様の傾向は、大証のデータにも認められる。図1は、縦軸に表されているプット・コール平価式の誤差

$$H - G + (X - F_{t,\tau}) \exp(-\tau r)$$

をインバース・マネーネス ($\frac{X}{S_t}$, inverse moneyness), および満期までの日数(取引日で1年が1になるように基準化)に対してプロットしたものである。

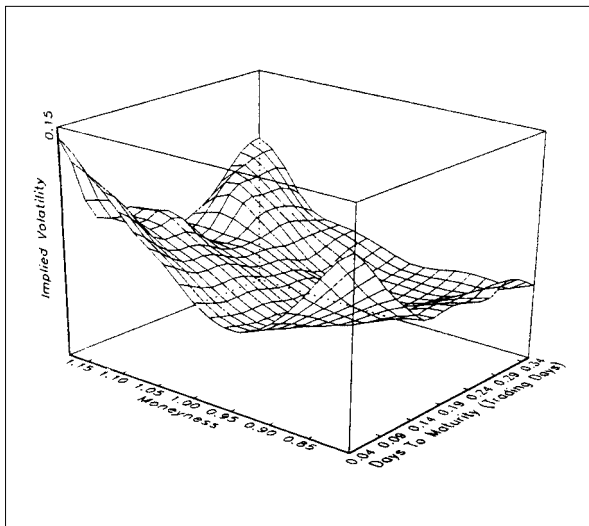
図1から明らかなように、コールのDITMでは負の値をとり、プットのDITMでは正の値をとる。こうした平価関係からの乖離は、イン・ザ・マネーの取引において流動性が低いことに起因している可能性が高い。1日あたりの取引量が50を下回る取引を除去したデータについて平価式からの乖離をみると、アット・ザ・マネーを中心により広範囲の取引で乖離が解消されていることを確認することができる。

図1 プットコール平価関係からの乖離



一方、図2は、1995年上半期のデータを用いながら、インプライド・ボラティリティ(implied volatility)をマネーネス($\frac{S}{X}$)と残存期間に対してプロットしたものである。図2に認められる傾向も、アメリカのそれと類似性を持つ。すなわち、マネーネスの両端ではインプライド・ボラティリティが顕著に高まり(文献ではボラティリティ・スマイルと呼ばれる現象である)、満期までの日数が短くなるにつれてインプライド・ボラティリティも大きくなる。図2は、大証のオプション市場においても、インプライド・ボラティリティがマネーネスや残存期間に大きく依存して変動することを示している。

図2 インプライド・ボラティリティ平面



¹1989年以降、大証は日本におけるオプション取引の中心市場となってきたものの、オプション価格、あるいはその取引に関する学術的な研究対象として扱われることは非常にまれであった。数少ない例外としては、Nishina and Nabil [9] をあげることができる。彼らはオプション収益率およびプット・コール平価関係の成立に関して詳細な検討を行った。Nakamura and Shiratsuka [8] は、有限差分法によって状態価格密度を近似し、その時系列的な変化を検討した。後者の研究は、われわれの研究目的と密接な関係を持っているものの、彼らの方法では推定結果に関して統計的な検証を行うことができない。

²アメリカン・タイプからヨーロッパ・タイプへの切り替えは、会員証券会社が顧客管理費を節約したいという要求によるところが大きい。

3.2 データの加工

本論文の実証研究では、ヨーロッパ・タイプの権利行使が行われていた1992年下半年から1998年上半年までの大証におけるオプション市場価格データ(終値)を用いている。推定サンプルとしては、全期間を半年ごとに区切り、計12期間に関して状態価格密度を推定している。

前小節で指摘した大証でのオプション取引の特徴を念頭に置きながら、Ait-Sahalia and Lo [1] が提案した方法と同様のデータ加工を行っている。第1に、オプション価格がついた時点と株式市場の取引終了時間が異なる可能性を考慮し、現実の指数先物価格の終値を用いるのではなく、アット・ザ・マネーにもっとも近い契約から先物価格の理論値を推定したものをを用いている。すなわち、アット・ザ・マネー付近において、

$$\hat{F}_{t,\tau} = H \exp(\tau r) - G \exp(\tau r) + X$$

という保有コスト・モデルに依拠しながら、指数先物価格の理論値を導出している。

第2に、DITMのオプションに関する過小評価を是正するために、市場流動性の高いOTMのプット・オプションおよび上で推定した先物価格を用いながら、プット・コール平価式からITMのコール・オプション価格を推定する。すなわち、ITMのコール・オプションに対応するOTMのプット・オプションの価格を、

$$\hat{H}_{t,\tau} = G - (X - \hat{F}_{t,\tau}) \exp(-\tau r)$$

に代入するわけである。

上の2つの工夫をこらしてデータを作成すると、半年ごとのサンプルについて2000個から4000個の標本が利用可能となった。

* 連絡先: 〒560 0043 豊中市待兼山町1-7, 大阪大学大学院経済学研究科 齊藤 誠, 電子メール: makoto@econ.osaka-u.ac.jp, 電話: 06 6850 5264, ファックス: 06 6850 5274.

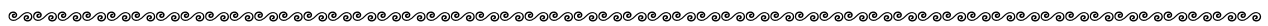
† 仁科一彦教授には大阪証券取引所の株価指数オプション取引データ・ベースの活用をお許し頂いた。また、小暮厚之教授、ならびに大阪大学でのセミナー参加者には有益なコメ

ントを頂いた。齊藤は、文部省科学研究費ならびに大阪大学大学院経済学研究科からの研究助成を受けている。ここに謝辞を申し上げたい。

【参考文献】

- [1] Ait-Sahalia, Y. and A. W. Lo, 1998, Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices, *Journal of Finance* 53, 499-547.
- [2] Banz, R. and M. Miller, 1978, Prices for state-contingent claims:some estimates and applications, *Journal of Business* 51, 653-672.
- [3] Black, F. and M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- [4] Breeden, D. and R. H. Litzenberger, 1978, Prices of state-contingent claims implicit in option prices, *Journal of Business* 51, 621-651.
- [5] Fan, J. and I. Gijbels, 1996, *Local polynomial modelling and its applications*, London : Chapman.
- [6] Masry, E., 1995, Multivariate local polynomial regression for time series: uniform strong consistency and rates, *Journal of Time Series Analysis* 17, 571-599.
- [7] Merton, R. C., 1973, Rational theory of option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.
- [8] Nakamura, H. and S. Shiratsuka, 1999, Extracting market expectations from option prices: case studies in Japanese option markets, *Bank of Japan Monetary and Economic Studies* 17, 1-43.
- [9] Nishina, K. and M. M. Nabil, 1997, Returns dynamics of Japanese stock index options, *The Japanese Economic Review* 48, 43-64.
- [10] Ross, S., 1976, Options and efficiency, *Quarterly Journal of Economics* 90, 75-89.
- [11] Ruppert, D. and M. P. Wand, 1994, Multivariate locally weighted least squares regression, *The Annals of Statistics* 22, 1346-1370.
- [12] Stoker, T., 1996, Smoothing bias in the measurement of marginal effects, *Journal of Econometrics* 72, 49-84.
- [13] Wand, M. P. and M. C. Jones, 1995, *Kernel Smoothing*, London : Chapman.

(たかぎ・しんご/さいとう・まこと)



日経株価指数300及び日経平均株価構成銘柄の一部入替えについて

日本経済新聞社は、平成12年6月26日(月)、日経株価指数300及び日経平均株価について、構成銘柄の合併による上場廃止に伴い、下記のとおり、構成銘柄の一部入替えを発表しました。

記

日経株価指数300

除外銘柄(コード)	補充銘柄(コード)	実施日
東 燃 (5 0 0 5)	ゼネラル石油 (5 0 1 2)	平成12年7月3日

日経平均株価

除外銘柄(コード)	補充銘柄(コード)	実施日
東 燃 (5 0 0 5)	資 生 堂 (4 9 1 1)	平成12年7月3日

以上