解　説

オプション取引データに基づいた状態価格密度の推計について：大阪証券取引所の事例　－２－

大阪大学大学院経済学研究科
助教授　齊　藤　　誠*†
大阪府立大学経済学部
講　師　高　木　真　吾

３　推定方法と推定結果

3.3 推定方法

第１節で述べたように本研究では，状態価格密度のノンパラメトリック推定に関してNW推定法とLP推定法を適用して，２つの推定手法から得られた推定結果の比較を行っていく。本小節では，２つの方法を簡単に紹介していこう（より詳細な紹介は，Ruppert and Wand［11］等を参照のこと）。

Aït-Sahalia and Lo［1］にならい，コール価格評価関数は，決定要因（引数）として行使価格（X），先物価格（F），残存期間（τ）という３変数を有する。また，ベクトルz_0を$(X_0, F_0, \tau_0)'$とする。点z_0におけるコール価格評価関数のNW推定量は以下のように定義される。

$$\tilde{H}_{NW}(z_0)=\sum_{i=1}^{n}[K_h(z_i-z_0)H_i],$$

ただし，nは標本数，$K_h(u)$はR^3で定義されるカーネル関数，hは対角要素としてバンド幅を持つ3次元の対角行列である[3]。

ここで，NW推定量に関していくつかの点を指摘しておこう。第１に，バンド幅は，クロス・バリデーション法（cross validation）にしたがって選択している[4]。

第２に，カーネル関数の次数に関する選択[5]は，推定量のバイアスと関数の滑らかさ（連続的微分可能性）のトレード・オフに関係している。つまり，より高い次数のカーネル関数を用いると，漸近的なバイアスは小さくなるが，それだけ当該関数に関して滑らかさが要求される。Aït-Sahalia and Lo［1］は２次と４次のカーネルを組み合わせたものを用いているが，われわれはもっとも頻繁に用いられている２次のガウシアン・カーネル関数（Gaussian kernel，標準正規密度）を用いた。こうしてNW法でノンパラメトリックに推定した$\tilde{H}_{NW}(z_0)$を行使価格に関して二階微分することによって，状態価格密度を導出している。

一方，LP推定法は，$\beta_k(z_0)$という係数パラメターを用いた次のような多項式を局所的に適用するという考え方に基づいている。

$$H_{LP}(z|z_0)=\sum_{0\le|k|\le p}\beta_k(z_0)(z-z_0)^k,$$

ただし，pは多項式の次数，$x^k=x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}$, $\Sigma_{0\le|k|\le p}=\Sigma_{j=0}^{p}\Sigma_{k_1=0}^{j}, \Sigma_{k_2=0}^{j}\Sigma_{k_3=0}^{j}$（$k_1+k_2+k_3=j$）である。

当該関数をテイラー展開すると，$(z-z_0)^k$にかかる係数がちょうどその次数に対応した偏微係数になることから，多項式の係数β_kを求めることでそれらの偏微係数を求めることが可能となる。具体的な推定値の計算方法では，次のような目的関数を想定しながら，目的関数を最小にするように係数パラメターを選ぶ。

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(H_i-\sum_{0\le|k|\le p}\beta_k(z_0)(z_i-z_0)^k\right)^2K_h(z_i-z_0)\right]$$

こうして推定されたパラメター$\tilde{\beta}_k(z_0)$を用いると，コール価格評価関数の推定値は，$\tilde{H}_{LP}(z|z_0)=\tilde{\beta}_0(z_0)$となる。

ここでは，LP推定量に関していくつかの点を指摘しておこう。第１に，多項式の次数pの選択は，推定量のバイアスと当該関数に関する滑らかさの要請とのトレードオフに直面する。つまり，次数を高くするとバイアスは小さくなるが，それだけ当該関数に関して滑らかさが要求される（高階の連続微分可能性を要求する）。Ruppert and Wand［11］は，一般に奇数次の多項式を選ぶことを推奨している。われわれの関心はコール価格評価関数$\tilde{H}_{LP}(z|z_0)$の２階の偏微係数の推定にある。したがって本研究では，二階の偏微係数が推定可能であり，かつ奇数次となる次数として，３次の次数を選択している。

第２に，コール価格評価関数$\tilde{H}_{LP}(z|z_0)$の行使価格に関する（二階）偏微係数の推定が非常に簡単に行うことができる。上に述べたように，テイラー展開に基づいて考えると，多項式のうち$(X_i-X_0)^2$を含む項について考えると，この推定係数が微分係数に相当している。他の偏微係数についても同様に考えればよい。いいかえると，

コール価格評価関数のあらゆる限界効果は，すべて多項式の係数推定値 $\tilde{\beta}_k(z_0)$ に集約されているのである。NW推定法のケースとは異なり，状態価格密度を導き足すために推定された関数を数値微分する必要がない。

第３に，カーネル関数としてはNW推定法の場合と同じく，ガウシアン・カーネルを用いた。NW推定法は局所的に定数（$p=0$ の多項式）で近似することに等しいので，コール価格評価関数の推定に関するかぎり，２つの方法の差異は，０次と３次という多項式の次数の違いに帰着する。

第４に，バンド幅は先程と同じくクロス･バリデーション法を用いて選択した[6]。

Aït-Sahalia and Lo [1]では，NW推定法が採用されている。彼らが指摘しているように，カーネルの次数を適切に選んでいるかぎり，この方法でも良好な推定結果を得ることができる。しかし，NW推定法を用いていると，境界付近では，内点と比べ，何らかの修正をしないとバイアスが大きくなってしまう。Fan and Gijbels [5]に指摘されているように，バイアスを矯正するための簡便な方法は知られていない。同様に，NW推定法の微係数についても，境界付近でのバイアスが大きくなる。われわれの関心は下方リスク(左端部分)に関する状態価格密度の振る舞いをみることにあるので，NW推定法は，少なくとも理論的にはわれわれの要求にふさわしい方法とは考えにくい。

一方，LP推定法では，適切に次数を選ぶことで，境界付近でも内点と同じ次数のバイアスになることが示されている。さらにこの性質は微係数に関しても成り立つことが知られている(Masry [6]，Ruppert and Wand [11]，Wand and Jones [13]等を参照のこと)。以上の議論が明らかにしているように，下方リスク（株価下落リスク）の評価という観点からすると，理論的にはLP推定法の方がふさわしい方法であると考えられる。

[3] ここで１次元のカーネル関数とは，原点に関して対称で $\int K(t)dt=1, (t \in R^1)$ という性質を持つ関数を考える。３次元の場合には，それぞれの要素に対応する１次元のカーネル関数の積を考えればよい。具体的には，$K_h(u)=\prod_{i=1}^{3} \frac{1}{hj}K(uj)$ とする。

[4] 具体的な計算に関しては，Aït-Sahalia and Lo [1]と同様，コール価格評価関数 $\tilde{H}_{NW}$ に関してバンド幅を選択した。本来求めたいのは二階の偏導関数なので，それに応じたバンド幅を選ぶべきであるが，Stoker [12]が指摘しているように，一般的に導関数に関して最適なバンド幅を探し出すことは難しい。

[5] k 次のカーネルとは，$\int u^{k-s}K(u)du=0, (s=1,2,\ldots,k-1)$ かつ $\int u^k K(u)du \neq 0(<\infty)$ なるカーネル関数をいう。ここから明らかなように，２次のカーネルとは有限の分散を持つ確率密度関数を含んでいる。

[6] NW推定法の場合と同様に，クロス・バリデーション法はコール価格評価関数 $\tilde{H}_{LP}$ に適用したものであって，偏導関数に関して最適なバンド幅とはなっていない。

3.4 推定結果

この節では，LP推定法およびNW推定法によって得られた状態価格密度の推定結果を議論していく。データの全期間は1992年下半期から1998年上半期であり，半年ずつにサンプル期間を区切って推定を行っている。LP推定法ではすべてのサンプル期間にわたって安定した結果を得ることができたが，NW推定法では非常に不安定な結果しか得られないサンプル期間もあった。その理由としては，NW推定法ではバンド幅の選択に関して非常に敏感であり，クロス・バリデーション法での選択が困難であったことが考えられる。

まず，LP推定法とNW推定法の両方から安定した推定結果が得られたサンプル期間についてみてみよう。図３には，２つの方法から推定された状態価格密度が先物価格 $F_{t,\tau}$ に対して実線でプロットされており，２本の破線によって推定値に関する95%信頼区間を表わしている。状態価格密度をグラフ上で表現するためには，どのくらいの日数が満期まで残っており，その時点の先物価格がいくらであるのかを指定しなければならないが，ここでは仮想的に２週間（取引日で10日）後に満期が到来し，現時点の先物指数水準は推定に用いた標本期間の期中平均に等しいと想定している。

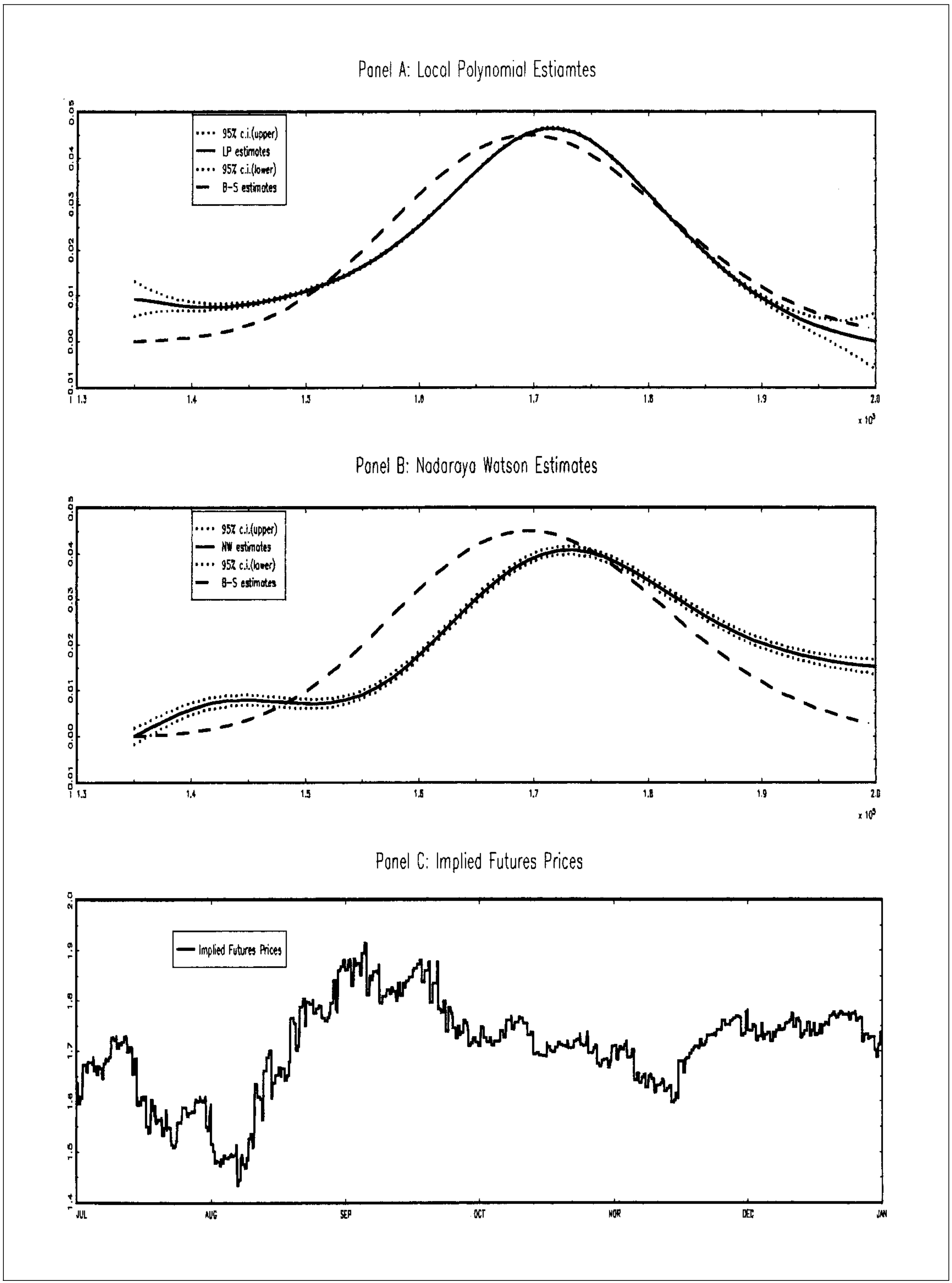
さらには，比較のためにブラック・ショールズ・マートン公式（以下では，BSM）から得られる状態価格密度も同時にプロットしている（太い破線)。ブラック・ショールズ・マートンの状態価格密度の導出においても，想定している満期までの残存日数と当該時点の先物価格水準については前述の条件と同じであり，唯一の未知母数であるボラティリティについては８日から12日の残存期間をもつオプション価格から計算されたインプライ

ド・ボラティリティの期中平均を用いている。

1992年についてみると，図3.1のパネルCから日経平均自体は趨勢的な動きを示していないことがわかる。同図のパネルAにはLP推定法，パネルBにはNW推定法による状態価格密度の推定結果が示されている。それぞれのパネルには，BSMから得られる状態価格密度もプロットしてる。

２つのノンパラメトリック推定結果を　BSMのそれと対比させると，LP推定法の状態価格密度の方がNW推定法の場合よりも，下方において裾が厚いことがわかる。理論的には境界付近においてLP推定法の方が信頼できる（バイアスが小さい）ということを考えあわせると，ここでの投資家は資産価格の急激な下落に対しては高い対価を払ってでもヘッジしたい誘因を強く持っていると

図３.１　推定された状態価格密度（1992年下半期）

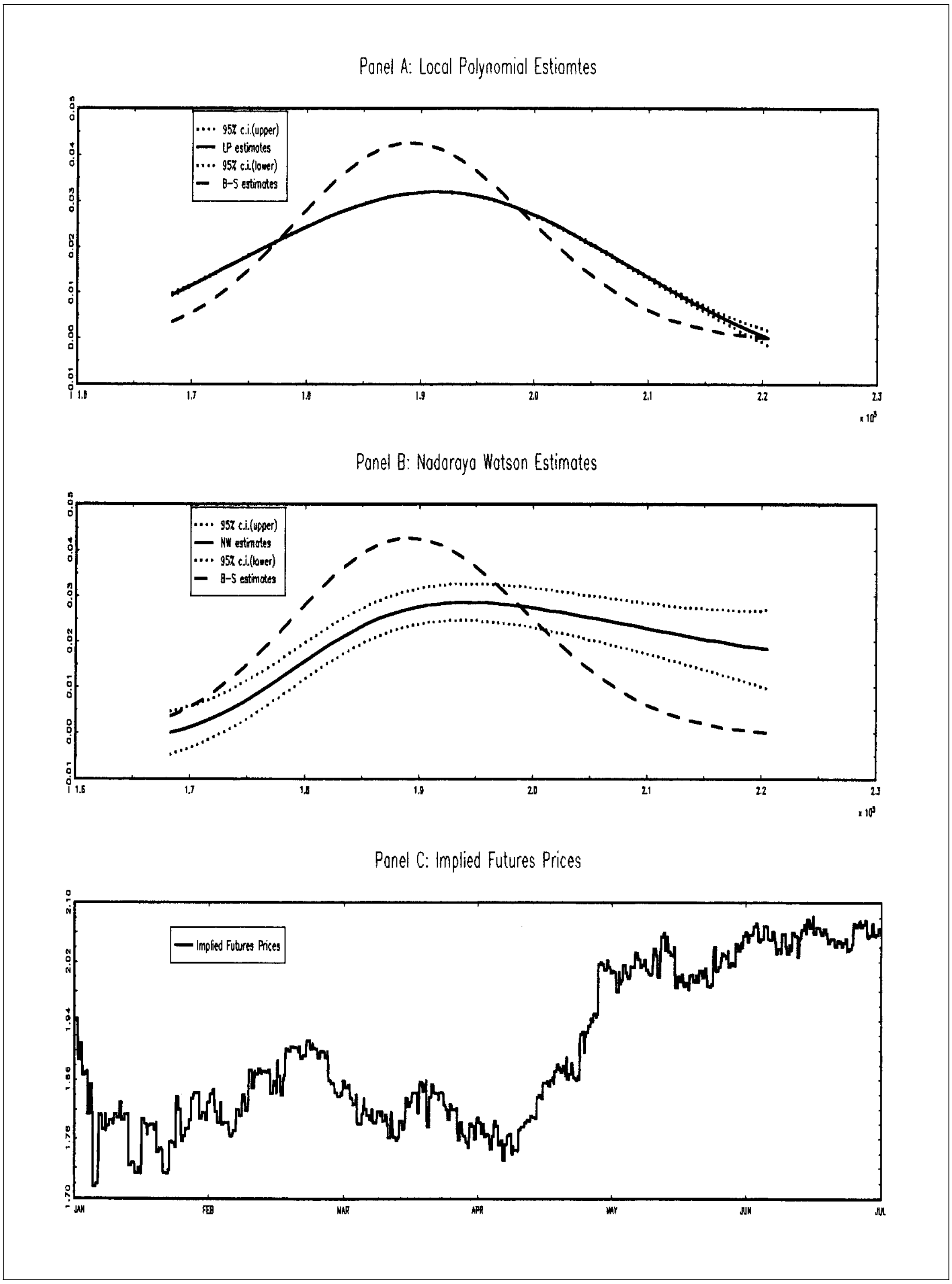


解釈することができる。

一方，1998年前半においては，BSMの状態価格密度は上方においてかなりの過小評価になっている（図3.3)。それに対して，1997年前半においては，LP推定法とNW推定法の両者の形状は異なっている。LP推定法では両端の裾が重く，不確実性が大きく非常に曖昧な期待しか形成できていない状況を示しているのに対して，NW推定法の推定結果では上方の裾が厚いだけである（図3.2)。

図4.1から4.3では，LP推定法の結果（実線）について，BSM（破線）との対比しながら，すべての期間にわたる時系列的な変動を観察している。図4.1によれば，BSMは，1992年後半から1994年前半にかけて下方リスクを傾向的に過小評価していることがわかる。一方，1995年後半から1996年前半，および1998年前半におけるLP推定法

図３.２　推定された状態価格密度（1997年上半期）



から得られる状態価格密度は上方への歪みがみられる。

また，1996年後半から1997年後半にかけて両端の裾の厚い密度関数になっていることをみてとることができる。この時期，将来の資産価格の期待形成に関わる相反する経済状況がみられた。円安や日銀短観での楽観的な情報から株価改善の期待が形成される一方，不良債権を抱える銀行，企業の信用状況に関する危惧が急速に高まったのもこの時期であった。こうした二極分化した背景をLP推定法による推定結果は非常によく捉えていると考えることができる。

以上の議論から，通常のオプション価格公式では裾の厚い状態価格密度という特性を捉えそこねている危険性があるともに，LP推定法とNW推定法との顕著な差異も観察されてきた。

図３.３　推定された状態価格密度（1998年上半期）

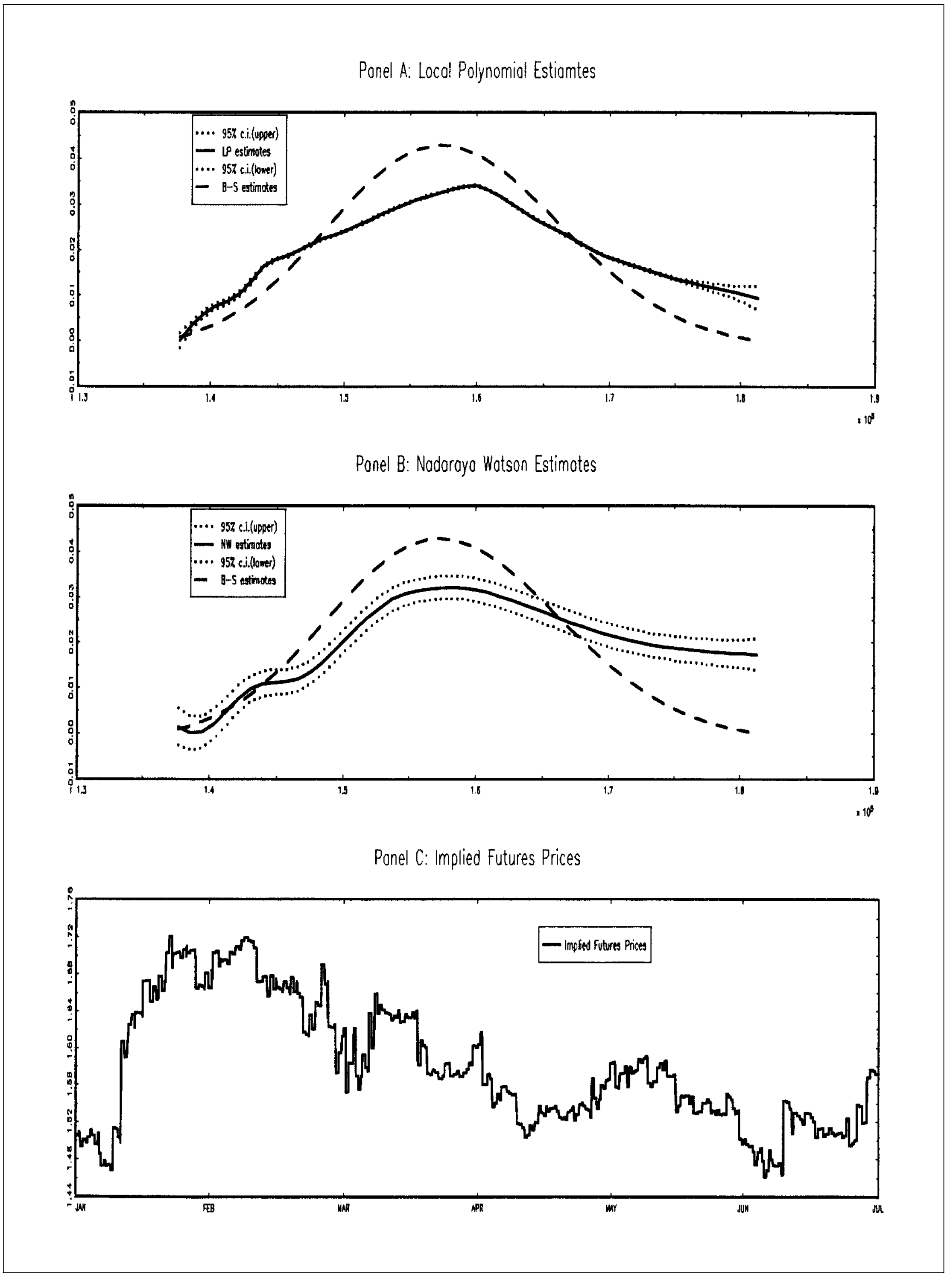


図4.1　2つの推定状態価格密度の比較

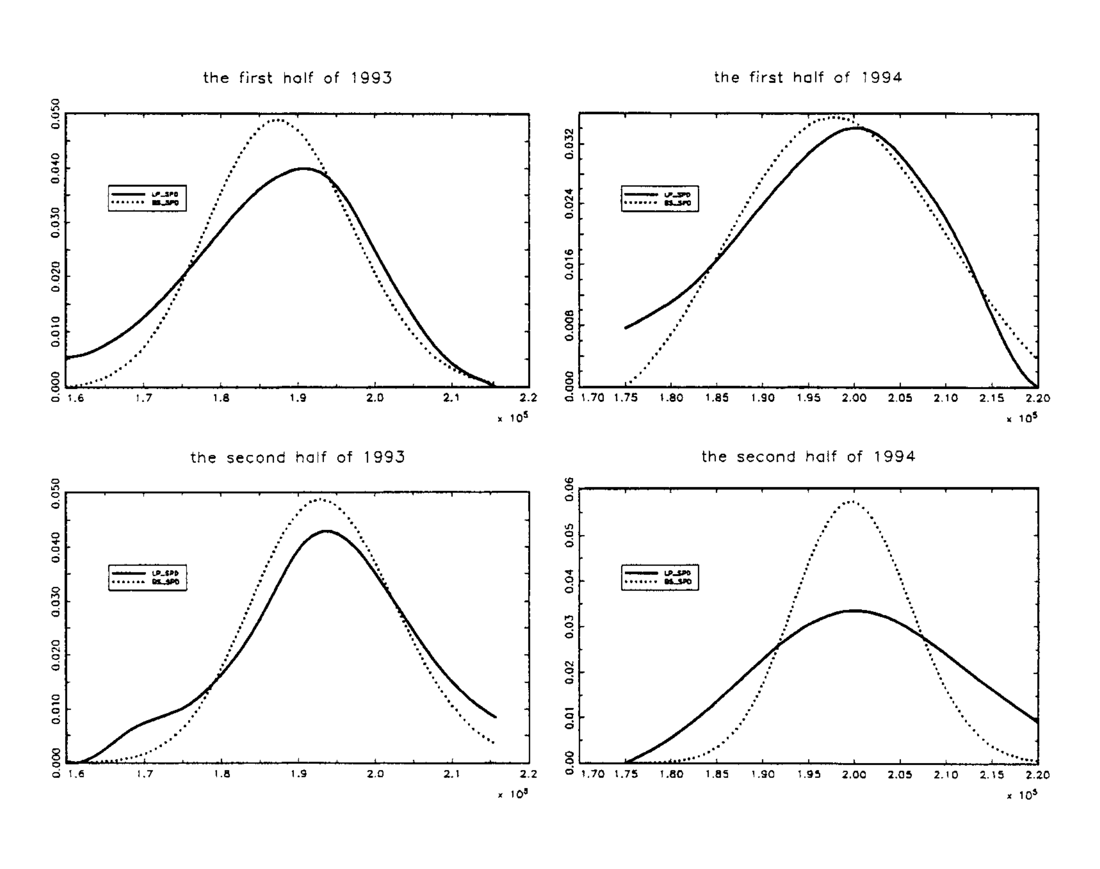


図4.2　2つの推定状態価格密度の比較

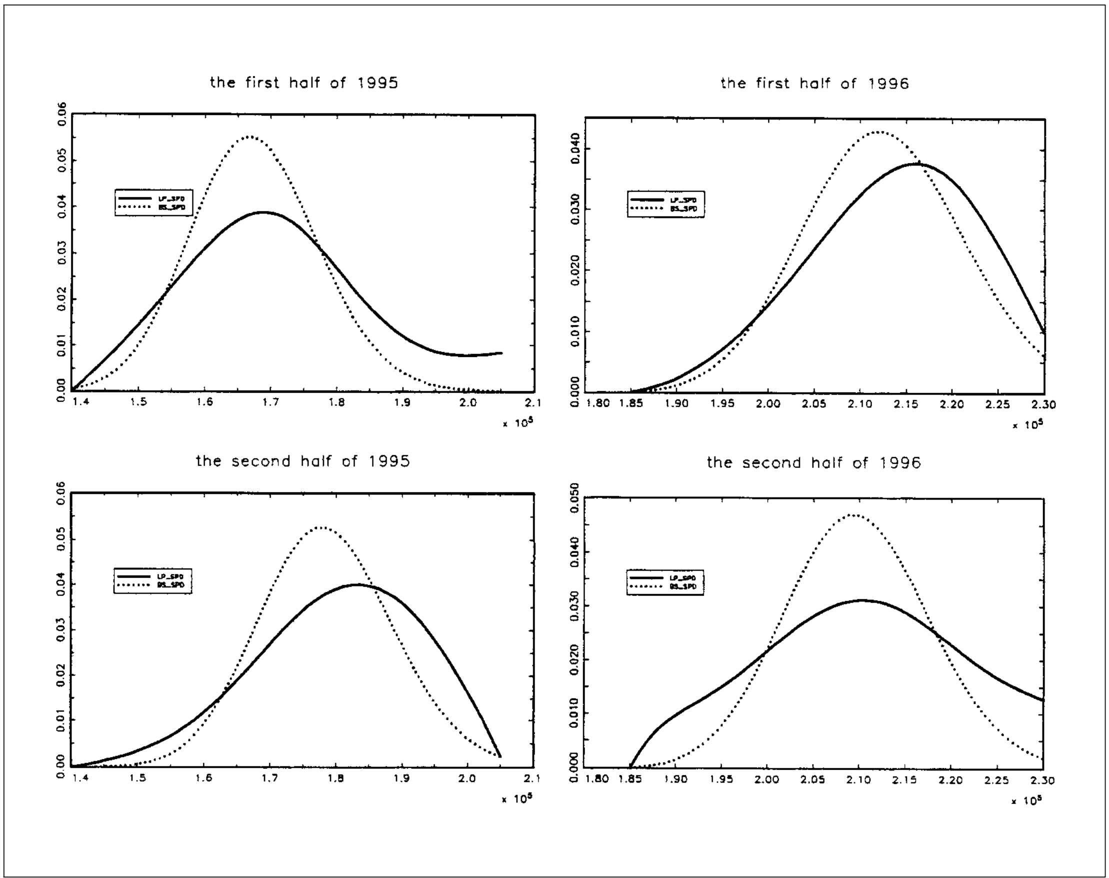
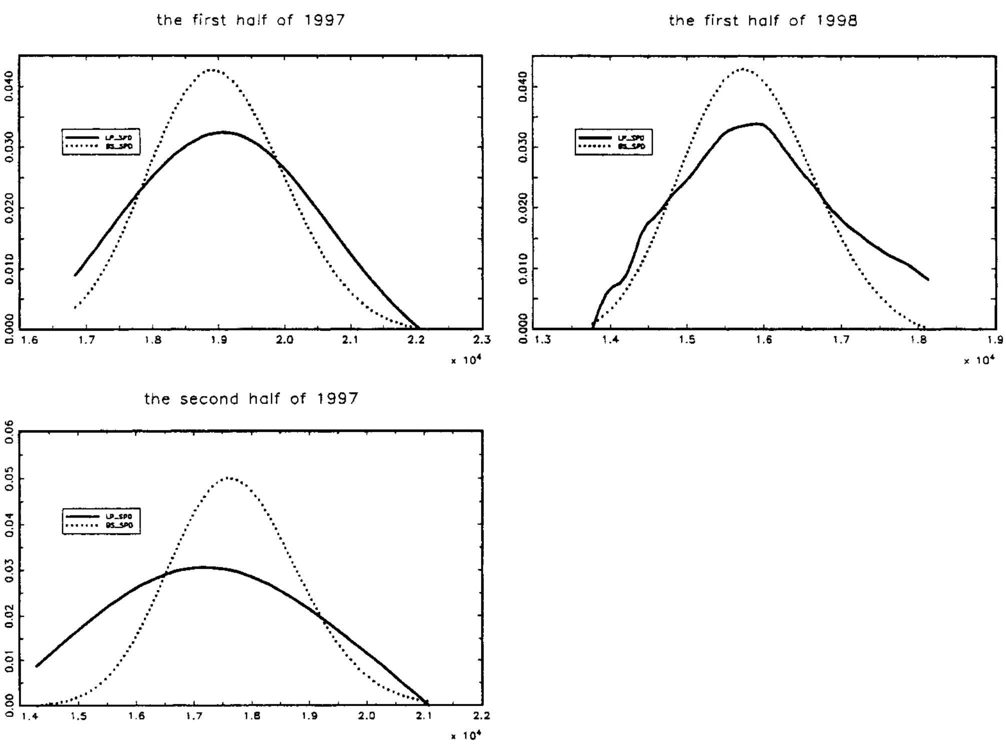


図4.3 2つの推定状態価格密度の比較



4 おわりに

本論文は，Aït-Sahalia and Lo [1]の提案した手法にしたがいながら，大阪証券取引所で取引されている株価指数オプションの市場価格データから，ノンパラメトリックに状態価格密度を推定してきた。状態価格密度には投資家のヘッジ需要に関する情報が含まれているが，特に，われわれは株価下落に対するヘッジ需要について高い関心を払ってきた。

株価下落に対するヘッジ需要に関する情報を得るためには，オプション価格評価関数の下方テイルをできるだけ正確にノンパラメトリックに推計する必要がある。そうした目的を念頭に，標準的な手法であるNW推定法ばかりではなく，当該関数の両端（テイル）の推定に優れたパフォーマンスを示しているLP推定法も用いてきた。

ノンパラメトリックな手法から推計した状態価格密度は，標準的なオプション価格評価式であるブラック・ショールズ・マートン公式の状態価格密度よりもしばしば下方の裾野が広いことを示している。いいかえると，ノンパラメトリックな手法によれば，ブラック・ショールズ・マートン公式が想定しているよりも投資家のヘッジ需要が高いことになる。また，下方テイルの推定に優れているLP推定法と，下方テイルの推定に必ずしも適していないNW推定法を比較してみると，NW推定法では株価下落のヘッジ需要を過小推計する可能性が高いことが認められた。

まとめてみると，ブラック・ショールズ・マートン公式とノンパラメトリックな推定手法との比較においても，LP推定法とNW推定法との比較においても，投資家の株価下落に対するヘッジ需要はきわめて高いということになる。逆にいえば，標準的な手法で暗黙に想定されている状態価格密度を用いると，投資家のヘッジ需要を過小評価してしまいかねない。

本論文で確認された実証的なファインディング，すなわち，状態価格密度関数の下方テイルが厚く，株価下落に対する投資家のヘッジ需要が高い，というファインディングは，次のような２つのインプリケーションを持ちえよう。第１に，ブラック・ショールズ・マートン公式等の標準的な価格評価モデルでは，株価下落に対して

ヘッジ機能を持つデリバティブの価格をきわめて過小に評価してしまいかねない。

第２に，標準的な資産価格評価モデルを機軸にVaR等に基づいてリスク管理を行うと，株価下落に対するヘッジの度合いが，実際に投資家が必要としている度合いを大きく下回ってしまうかもしれない。まとめてみると，デリバティブ価格評価においても，リスク管理においても，本論文が実証的に指摘している状態価格密度の下方テイルの厚さは重要な意味合いを持つことになる。

＊ 連絡先：〒560-0043　豊中市待兼山町1－7，大阪大学大学院経済学研究科　齊藤 誠，電子メイル：makoto@econ.osaka-u.ac.jp，電話：06-6850-5264，ファックス：06-6850-5274。
† 仁科一彦教授には大阪証券取引所の株価指数オプション取引データ・ベースの活用をお許し頂いた。また，小暮厚之教授，ならびに大阪大学でのセミナー参加者には有益なコメントを頂いた。齊藤は，文部省科学研究費ならびに大阪大学大学院経済学研究科からの研究助成を受けている。ここに謝辞を申し上げたい。

【参考文献】

[1] Aït-Sahalia, Y. and A. W. Lo, 1998, Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices, Journal of Finance 53, 499-547.

[2] Banz, R. and M. Miller, 1978, Prices for state-contingent claims:some estimates and applications, Journal of Business 51, 653-672.

[3] Black, F. and M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy 81, 637-659.

[4] Breeden, D. and R. H. Litzenberger, 1978, Prices of state-contingent claims implicit in option prices, Journal of Business 51, 621-651.

[5] Fan, J. and I. Gijbels, 1996, Local polynomial modelling and its applications, London : Chapman.

[6] Masry, E., 1995, Multivariate local polynomial regression for time series: uniform strong consistency and rates, Journal of Time Series Analysis 17, 571-599.

[7] Merton, R. C., 1973, Rational theory of option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141-183.

[8] Nakamura, H. and S. Shiratsuka, 1999, Extracting market expectations from option prices: case studies in Japanese option markets, Bank of Japan Monetary and Economic Studies 17, 1-43.

[9] Nishina, K. and M. M. Nabil, 1997, Returns dynamics of Japanese stock index options, The Japanese Economic Review 48, 43-64.

[10] Ross, S., 1976, Options and efficiency, Quarterly Journal of Economics 90, 75-89.

[11] Ruppert, D. and M. P. Wand, 1994, Multivariate locally weighted least squares regression, The Annals of Statistics 22, 1346-1370.

[12] Stoker, T., 1996, Smoothing bias in the measurement of marginal effects, Journal of Econometrics 72, 49-84.

[13] Wand, M. P. and M. C. Jones, 1995, Kernel Smoothing, London : Chapman.

（たかぎ・しんご/さいとう・まこと）