

オプションの残存期間とボラティリティ・インデックスの算出

大阪大学 大学院経済学研究科

数理・データ科学教育研究センター 大屋幸輔

1 はじめに

市場で取引されるオプションの価格からリスク中立確率分布を算出することは理論的には可能であり、その分布の特徴をとらえる指標として、また市場のリスクを表す指標としてボラティリティ・インデックスは実際に算出され多くの市場関係者が参照するものとなっている。米国 Cboe の VIX をはじめ、各国の代表的な市場に対応するインデックスが算出されているが、我が国に関しては大阪大学数理・データ科学教育研究センターの VXJ、日本経済新聞社による日経 VI があげられる。

これらインデックスはいずれも 30 日先のインプライド・ボラティリティの期待される値として算出されているが、この 30 日先の値を算出するには、残存期間がちょうど 30 日であるオプションの市場価格が必要とされる。しかし市場において取引されるオプションの残存期間は満期に向けて日々、減少していくものであり、満期までちょうど 30 日のオプションが常に市場に存在しているわけではない。実際のボラティリティ・インデックスの算出においては、期近の限月とその翌限月という 2 つの限月に対応するそれぞれのオプションの市場取引価格から算出された 2 つの値をもちいて、必要としている残存期間に対応するインデックスをもとめている。現実の市場においては、中心限月となるオプション取引は流動性も高く、観測されるオプション価格の情報量も多いが、もう 1 つの残存期間の長い限月については、市況によっては流動性が低い可能性もありえる。そしてそれはボラティリティ・インデックスの算出に困難をもたらすことにもつながる。以下ではそのようなオプションの残存期間とボラティリティ・インデックスとの関係を包括的に見ていく。

2 ボラティリティ・インデックス

Chicago Board Options Exchange (2021) では VIX Index の算出について、(1) をもちいて解説している。(1) はボラティリティ・インデックスを 2 乗した値に関する理論公式を観測データに基づいてインデックスが算出可能となるように近似したものである。

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (1)$$

使用されるオプション価格は、権利行使価格 K_i ごとに観測されるオプションの仲値 $Q(K_i)$ ($K_i > K_0$ なら out-of-the-money call, $K_i < K_0$ なら out-of-the-money put, K_0 は先渡価格 F に等しい、あるいは直下の権利行使価格) である*1。この (1) や他の方法によって直近限月 (第1限月) と翌限月 (第2限月) に関して算出された時点 t でのボラティリティ・インデックスの2乗を、それぞれ $\sigma_{1,t}^2$ と $\sigma_{2,t}^2$ とすると、 VIX_t は

$$VIX_t = 100 \times \sqrt{\left\{ T_1 \sigma_{1t}^2 \left(\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_{2t}^2 \left(\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \right\} \times \frac{N_{365}}{N_{30}}} \quad (2)$$

によって与えられる*2。 N_{365} は年間 (365日) の分数 (number of minutes), N_{30} は30日間の分数, N_{T_i} はVIXの算出時点から第 i 限月のオプションの満期までの分数, そして $T_i = N_{T_i}/N_{365}$ である。

第1限月は直近限月, 第2限月は翌限月としたが, 実際の算出においては最終取引日以前にそれぞれ次の限月のオプションに切り替えられる場合には (2) にある $N_{30} - N_{T_1}$ が負となり, 図1 (右) にあるように σ_{1t}^2 と σ_{2t}^2 の2点の外挿によって σ_t^2 がもとめられることになる。

仮にいずれの限月のオプションでも同じような流動性で, より多くの権利行使価格でオプション価格が観測されるならば, ボラティリティ・インデックスの算出には困難は生じないが, 図1 (右) のケースでは, 第2限月はインデックスの算出時点から遠く離れた満期

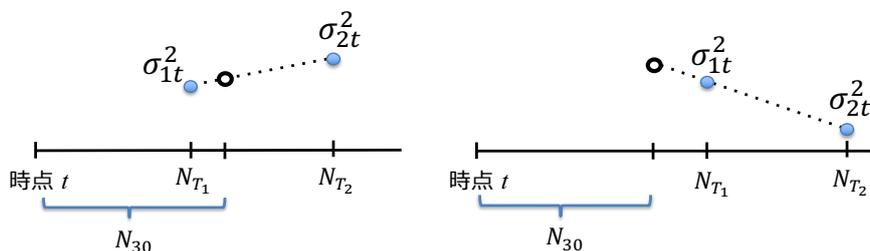


図1 左 ($N_{30} > N_{T_1}$): 内挿, 右 ($N_{30} < N_{T_1}$): 外挿

*1 大阪大学の VXJ はこの近似式 (1) によらない方法によって算出されている。その算出法についての解説は 深澤 (2019a), 深澤 (2019b) で与えられている。

*2 (1), (2) で使用されている記号の定義, およびその解説については Chicago Board Options Exchange (2021) を参照のこと。

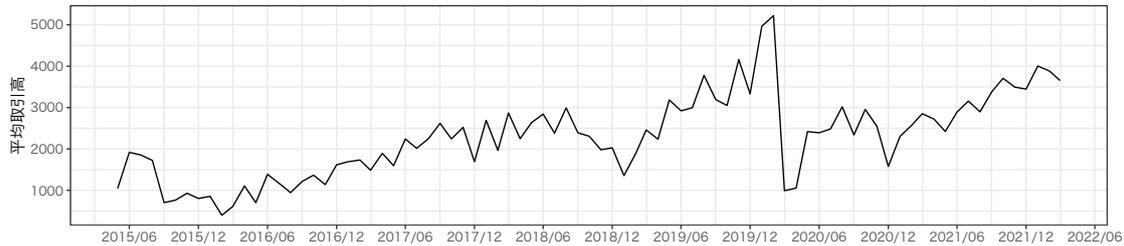


図2 Weekly オプションの取引高

のオプションとなってしまう、市況によってはインデックスの算出に十分な観測価格が得られない可能性がある。またその第2限月は30日先というターゲットとする時点からも遠く、そのような状況下で単純な2時点の値の外挿という手段によるインデックスの算出法には改良の余地があるといえる。例えばCboeでは当初、ボラティリティ・インデックスの算出には、およそ1ヶ月の間隔の2つ限月のオプションの価格を利用していたが、現在では30日先というターゲットに近い満期をもつオプションとしてstandard SPX optionに加えてWeekly オプションであるSPX Weeklys も利用してVIXを算出している*3。

我が国でも大阪取引所においてWeekly オプションが取引されている。図2はWeekly オプションの取引高の月中平均の時系列を描いたものである*4。2020年に入って、covid-19の感染拡大の影響により世界的に株式市場が急落したことを反映して、Weekly オプションの取引高も一時的に大きく減少しているが、傾向としては、2015年5月25日に導入以来、その取引高は年々増大してきているといえる。

3 オプションの残存期間と観測されるオプション価格

ボラティリティ・インデックスの算出には残存期間が異なる2つのオプションに関して、幅広い権利行使価格帯でオプション価格が観測されている必要がある。2022年3月31日を例にとると、日経225オプションについては、2022年4月限、5月限が直近限月と翌限月に相当する。2022年3月31日に取引可能な日経225オプションから4月限、5月限、6月限、同様に日経225Weekly オプションのうち2022年4月第1週限、第3週限、第4週限に関して、各権利行使価格ごとに日中（2022年3月31日）の終値として観

*3 Chicago Board Options Exchange (2021)によれば、23日以上、37日以下の満期のオプションの価格が利用されている。

*4 JPXのwebページ<https://www.jpx.co.jp/derivatives/products/domestic/225options/03.html>で公開されているWeekly オプション日次取引高を筆者が加工したものである。

先物・オプションレポート 2022年5月号

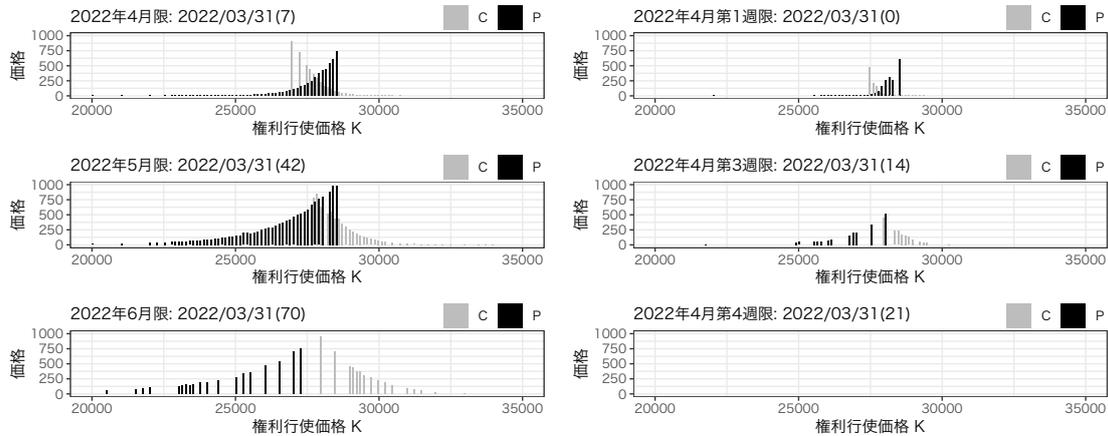


図3 2022年3月31日：権利行使価格 K とオプション価格 $P(K)$, $C(K)$

測されているコールとプットの価格を図示したものが図3である。日付の後の括弧の中はそのオプションの残存期間を表している。図3左上段、左中段では、多くの権利行使価格でオプション価格が観測されていることがわかる。これらの価格から σ_{1t}^2 と σ_{2t}^2 が算出され、残存期間がそれぞれ7日と42日であることから、内挿によって30日先の σ_t^2 が算出できることがわかる*5。ここで4月第3週限（残存期間14日）のオプション価格（図3右中段）が利用できれば、30日先の値を、残存期間7日、14日、42日の各値から算出できるため精度の向上が期待できる。

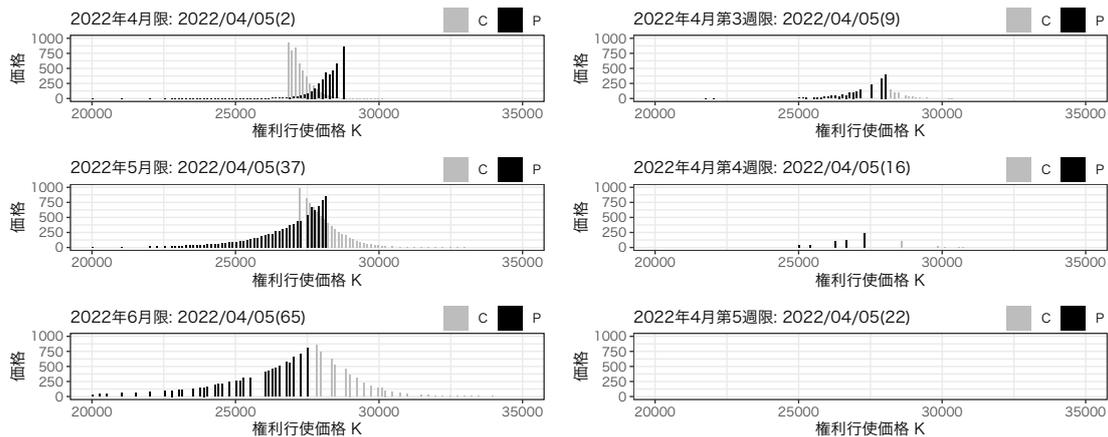


図4 2022年4月5日：権利行使価格 K とオプション価格 $P(K)$, $C(K)$

*5 図3右下段に示されている Weekly オプション 4月第4週限に関しては残存期間が21日であり、30日先というターゲットに近いオプションではあるが、Weekly オプションとしては残存期間が比較的長いオプションであるため取引はみられない。図4右下段の4月第5週限(22)についても同様。

同様に 2022年4月5日の状況をあらわしているのが図4である。4月限のオプションは残存期間が2日であるため、第1限月を5月限、第2限月を6月限のオプションとすると、図1(右)に示す外挿によりインデックスを算出する状況となる。他方、4月第3週限(残存期間9日)と第4週限(残存期間16日)の Weekly オプションを比較すると、第3週限の方が多くの権利行使価格で取引価格が観測されている。そこで第3週限の Weekly オプションと5月限のオプション(残存期間37日)を利用すると、外挿ではなく内挿により30日先のインデックスを算出することができる。

4 おわりに

Weekly オプションの価格を利用することで精度の高い30日先のボラティリティ・インデックスの算出が期待できることを見てきた。本稿でとりあげた例は特定の日付のものであり、市場をとりまく様々な要因により日々変化する状況においても同様のことが期待できるかどうかは、多くの検証を重ねて明らかにしていかなければならない課題ではある。実際、残存期間の短い Weekly オプションは多くの権利行使価格帯で取引されているが、残存期間が長い Weekly オプションについては、ボラティリティ・インデックスの算出での利用は現時点では難しい。しかしながら残存期間の短い Weekly オプションをボラティリティ・インデックスの算出に活用する意義は十分にあると考えられる。

参考文献

Chicago Board Options Exchange (2021), *VIX White Paper-CBOE Volatility Index*,
Available online: <https://cdn.cboe.com/resources/vix/vixwhite.pdf>

深澤正彰(2019),「ボラティリティ指数の理論」,『先物・オプションレポート』,31(11),
大阪取引所.

深澤正彰(2019),「インプライド・ボラティリティの数理」,『先物・オプションレポート』,31(12),大阪取引所.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。