GARCH 型モデルによるボラティリティ指数の価格付け

甲南大学 経済学部 石田 功

1 はじめに

株式市場の将来のボラティリティの投資家予想の尺度として、その市場の代表的株価指数を原資産価格とするオプションの市場価格から求めたボラティリティ指数（VI）が参照されることが多い。また、ボラティリティ指数に関連する金融資産も広く取引されている。米国株式市場については VIX が有名であるが、日本市場についても、日本経済新聞社が大阪取引所に上場されている日経 225 オプション価格に基づく VIX 型のボラティリティ指数である日経平均ボラティリティ・インデックス（日経平均 VI）を算出・公表しており、それを対象とする日経平均 VI 先物が大阪取引所で取引されている[1]。市場参加者のボラティリティ予想として VI を参照したり、VI 関連金融商品価格を評価したりする際には、実際の VI の値が原資産価格の変動特性やオプション価格理論と整合的であるか、また逆に、どのような原資産価格変動モデルやオプション価格理論が VI と整合的なのかを考察することが重要になる。

派生資産価格の分析は連続時間モデルの枠組内で行われることが多いが、離散時間 GARCH 型モデルを用いるアプローチも、Duan(1995)が先鞭を付けて以降、大きく発展している。本稿では、Hansen et al. (2021) (以下、HHTW)による GARCH 型モデル・アプローチの VI 評価への応用方法の概略と、その日経平均 VI への適用例を紹介する。

2 原資産価格変動の実現 GARCH モデル

HHTW は S&P 500 指数を対象とする VIX の分析を行っているが、本稿では日経平均株価を対象とする日経 VI を想定し説明を進める。まず、日経平均株価の日次対数リターン(%)の時系列$\{R_t\}$は次の GARCH 型モデルに従うと考える：

$$R_{t+1} \equiv \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \times 100 = r + \lambda h_{t+1} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}z_{t+1}, \qquad z_t \sim i.i.d.\mathcal{N}(0,1) \tag{1}$$

ここで、S_tは第t日の日経平均株価終値、h_{t+1}はt時点で利用可能な情報で条件付けたR_{t+1}の条件付分散、rはリスクフリー・レート、λはエクイティ・リスクプレミアムである。$-\frac{1}{2}h_{t+1}$はコンベキシティ調整項で、後述の式(11)に繋がる。h_{t+1}の時間変動を捉えるボラティリテ

[1] 計算方法等の詳細は日本経済新聞社(2021)参照。日経平均株価に関するボラティリティ指数としては他に大阪大学数理・データ科学教育研究センターのVXJがあるが、算出方法はVIXとは異なる。詳しくは深澤(2019a, 2019b)参照。

ィ・モデルとしては、GARCH型の多くの変種が提案されている。ボラティリティ予測には、過去の日次リターンに加えて、実現測度（最も単純なものは、例えば、日中の数分間のリターンの2乗和等の「実現ボラティリティ」）を用いることが精度向上に大きく役立つことが知られている。両者を利用する洗練された確率ボラティリティ・モデルとしてはTakahashi et al. (2009)が先行するが、GARCH型モデルとしてはHansen et al. (2012)、及び、Hansen and Huang (2016)の実現GARCH (Realized GARCH)モデルが広く用いられている。Hansen et al. (2012)の(1,1)次の対数バージョンでは、条件付分散と日次実現測度x_tは次の変動式を持つ：

$$\ln h_{t+1} = \ddot{\omega} + \ddot{\beta} \ln h_t + \gamma \ln x_t, \tag{2}$$

$$\ln x_t = \kappa + \phi \ln h_t + \delta(z_t) + \sigma u_t,\ u_t \sim i.i.d.\mathcal{N}(0,1), \tag{3}$$

ここで、x_tは第t日の実現測度、$\delta(z_t)$はリターン・ショックの関数（期待値はゼロ）、$\{u_t\}$は$\{z_t\}$とは互いに独立なボラティリティ・ショックである。式(2)から、実現GARCHモデルはリターンの条件付分散の説明・予測に直接観測可能な実現測度の持つ情報も利用するモデルであることが明らかであるが、式(3)を式(2)に代入すれば、

$$\ln h_{t+1} = \omega + \beta \ln h_t + \gamma\delta(z_t) + \gamma\sigma u_t, \tag{4}$$

が得られ（ここで、$\omega \equiv \ddot{\omega} + \gamma\kappa,\ \beta \equiv\ \ddot{\beta} + \gamma\phi$）、実現GARCHモデルは条件付分散がリターン・ショックz_tとそれとは独立なボラティリティ・ショックu_tにより駆動されるモデルであることが分かる。$\gamma = 0$の場合は、実現GARCHモデルはEGARCH(1,1)となる。$\delta(z)$の具体的な関数形としては$\delta(z) = \delta_1 z + \delta_2(z^2 - 1)$が用いられことが多く、以下、本稿でもこの関数形を考える。$\delta_1 < 0$の場合は、負のリターン・ショックは絶対値が同じ規模の正のリターン・ショックよりも翌日のボラティリティを高めるという、多くの株価や株価指数のデータに見られる所謂「レバレッジ効果」が得られる。Hansen and Zhang (2016)は、$\ln h_{t+1}$と$\ln x_t$を駆動するリターン・ショック項が同じ$\delta(z_t)$（ただし、前者にはスケール調整γが付く）であるという制約を緩める下記の実現GARCHモデルを提唱している：

$$\ln h_{t+1} = \omega + \beta \ln h_t + \tau_1 z_t + \tau_2(z_t^2 - 1) + \gamma\sigma u_t, \qquad u_t \sim i.i.d.\mathcal{N}(0,1) \tag{5}$$

$$\ln x_t = \kappa + \phi \ln h_t + \delta_1 z_t + \delta_2(z_t^2 - 1) + \sigma u_t, \tag{6}$$

ここで、$(\omega, \beta, \tau_1, \tau_2, \gamma, \sigma, \kappa, \phi, \delta_1, \delta_2)$はデータから推定するパラメータである。

本稿のデータへの適用例では、HHTW に倣い、実現測度として実現カーネルを採用した（実現ボラティリティの測度の一つ。詳しくは HHTW 及びその引用論文参照。なお、HHTW は頑健性チェックとして他の実現ボラティリティの測度を用いた VIX に関する実証分析も行い、結果には大差はなかったと報告している）。

3　リスク中立測度の下での実現 GARCH モデル

リターンのモデルを特定化すれば、次のステップは派生資産価格の評価に必要なリスク中立測度$\mathbb{Q}$の選定となる。確率的割引ファクター(stochastic discount factor; SDF)は資産価格X_{t+1}について$E_t[M_{t+1}X_{t+1}] = E_t^{\mathbb{Q}}[X_{t+1}]$を成立させるような確率変数であるが（ここで、$E_t[\cdot], E_t^{\mathbb{Q}}[\cdot]$は、それぞれ現実の確率測度と$\mathbb{Q}$による、$t$時点の情報での条件付期待値）、HHTW は Corsi et al.(2013)等に倣い、リターン・ショックz_tとボラティリティ・ショックu_tを状態変数とする次式の「指数アフィン型 SDF」を採用している：

$$M_{t+1} = \exp\left(-\lambda z_{t+1} - \xi u_{t+1} - \frac{1}{2}(\lambda^2 + \xi^2)\right) \tag{7}$$

ここで、λは式(1)のエクイティ・リスクプレミアムに等しい。$z_t^* \equiv z_t + \lambda, u_t^* \equiv u_t + \xi$を定義し、$z_t = z_t^* - \lambda, u_t = u_t^* - \xi$を実現 GARCH モデル(1), (5), (6)に代入すれば、

$$R_{t+1} = r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}z_{t+1}^*, \tag{8}$$

$$\ln h_{t+1} = \tilde{\omega} + \beta \ln h_t + \tilde{\tau}_1 z_t^* + \tau_2(z_t^{*2} - 1) + \gamma\sigma u_t^*, \tag{9}$$

$$\ln x_{t+1} = \tilde{\kappa} + \phi \ln h_t + \tilde{\delta}_1 z_t^* + \delta_2(z_t^{*2} - 1) + \sigma u_t^*, \tag{10}$$

が得られる。ここで、$\tilde{\omega} \equiv \omega - \tau_1\lambda + \tau_2\lambda^2 - \gamma\sigma\xi$, $\tilde{\tau}_1 \equiv \tau_1 - 2\tau_2\lambda$, $\tilde{\kappa} \equiv \kappa - \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 - \sigma\xi$, $\tilde{\delta}_1 \equiv \delta_1 - 2\delta_2\lambda$である。指数アフィン型SDF（式(7)）が含意するリスク中立測度$\mathbb{Q}$の下では、$\{(z_t^*, u_t^*)\}$は標準正規分布（平均0、分散1かつ互いに独立）に従う2変量$i.i.d.$時系列となる。これから、

$$E_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_{t+1}}{S_t}\right] = E_t^{\mathbb{Q}}[\exp(R_{t+1})] = \exp(r), \tag{11}$$

となることが分かる。ペイオフが原資産価格S_Tに依存するヨーロピアン・オプションの理論価格は、$\mathbb{Q}$の下での期待値をリスクフリー・レートで現在価値に割り引くことにより求めることができるが、閉型解が求まらない実現GARCHモデルの場合、モンテカルロ・シミュレーションや、エッジワース展開による近似解の方法により求められる（Huang et al. (2017)）。なお、GARCH型モデルによるオプション価格付けにはHeston and Nandi (2000)の方法もあるが、これはある特殊なGARCH型モデル（Heston= Nandiモデル）にDuan(1995)のリスク中立化（式(7)においてξ=0とする特殊ケースとして得られる）を組み合わせるもので、例外的にオプションの閉型解が得られる方法として頻用される。しかしながら、米国S&P 500指数日次時系列のモデルとしてはデータ適合度、ボラティリティ予測ともに実現GARCHモデルがHeston=Nandiモデルを凌駕することが報告されている（例えばHHTW）。幸いなことに、日経平均VIのようなVIX型ボラティリティ指数の理論価格を求める場合は、株価指数オプションの場合と異なり、実現GARCHと指数アフィン型SDFの組み合わせの下でも閉型解が求まる。

4　ボラティリティ指数の理論価格

モデルフリー・インプライド・ボラティリティの概念（渡部(2007)及びその引用文献に詳

しい）を実装する指数の代表格であるシカゴ・オプション取引所のVIX指数は、S&P500指数の翌30日間累積分散の（リスク中立測度の下での）期待値の平方根を年率%化したもの）の計測を意図するものである（CBOE (2021), 大屋(2022)参照）。HHTW等は、GARCH型モデルが含意するVIX値（理論値）を、

$$VI_t^{model} = \sqrt{\frac{252}{22}\sum_{k=1}^{22} E_t^{\mathbb{Q}}[h_{t+k}]} \tag{12}$$

としている。取引日の日次時系列データから推定・予測するモデルなので、「翌 1 か月間」を 22 日、年率化に際しては 1 年を 252 日としている。本稿の計算例では月間取引日、年間取引日の標本期間平均に合わせてそれぞれ 20 日、244 日としている。h_{t+k}は採用する特定の GARCH 型モデルに依存するが、実現 GARCH モデル(1)(5)(6)と指数アフィン型 SDF(7)の下では、次式の通りとなる（証明は HHTW を参照）:

$$VI_t^{model} = \sqrt{\frac{252}{22}\left\{h_{t+1} + \sum_{k=1}^{22}\left(\prod_{i=0}^{k-2} F_i\right) h_{t+1}^{\beta^{k-1}}\right\}}, \tag{13}$$

ここで、$F_i \equiv \left(1-2\beta^i\tau_2\right)^{-1/2}\exp\left(\beta^i(\tilde{\omega}-\tau_2)+\frac{1}{2}\beta^{2i}\left[\frac{\tilde{\tau}_1}{1-2\beta^i\tau_2}+\gamma^2\sigma^2\right]\right)$。

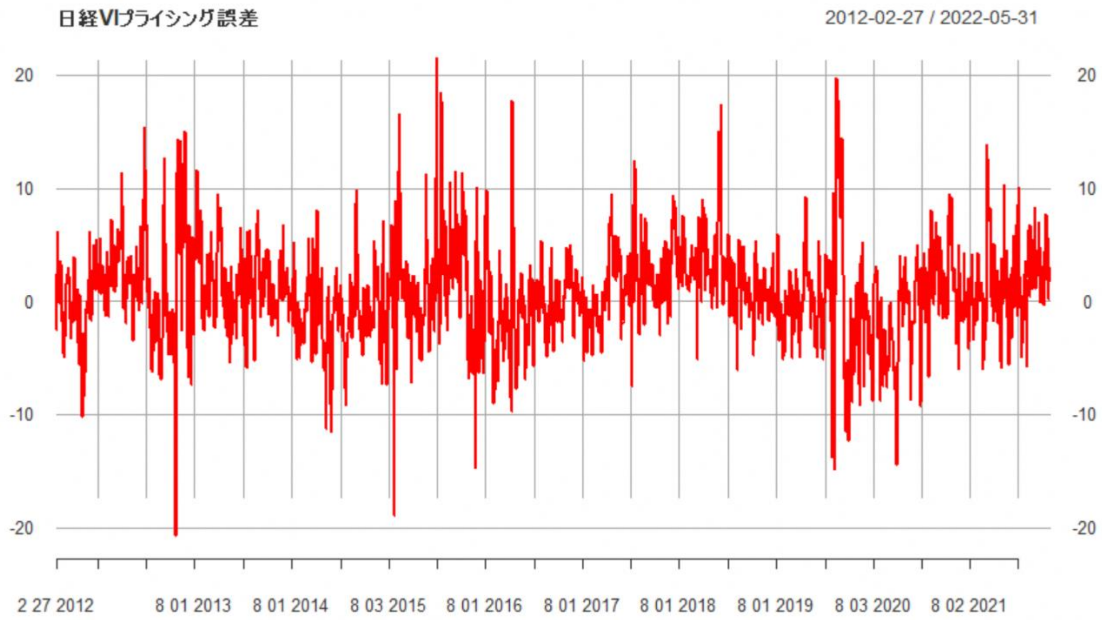
5　日経平均 VI データへの適用

本節では、比較的容易に入手可能なデータとフリー統計ソフト R を用いて GARCH 型モデルが含意する日経平均 VI の理論値が簡単に推定できることを紹介する。

標本期間 2012 年 2 月 27 日から 2022 年 5 月 31 日までの日経平均 VI の日次終値は Nikkei NEEDS Financial Quest より得た。実現 GARCH モデル推定のための、日経平均の日次終値及び実現カーネルは、Realized Library (Oxford-Mann Institute of Quantitative Finance 2022)よりダウンロードした 2002 年 2 月 4 日から 2022 年 5 月 31 日までのデータを用いた。

実現 GARCH モデルの推定には R の GARCH 型モデル分析パッケージ rugarch を用いた。rugarch は主要な GARCH 型モデルをカバーする優れた R パッケージであるが、残念ながら、実現 GARCH モデルについては Hansen et al. (2012)のオリジナル・バージョンの推定しかできない等の制約がある（Galanos(2022)）。HHTW は S&P500 日次リターン、その実現カーネルの時系列データに加えて、ボラティリティ指数の時系列データも同時に利用し、推定を行なっている。本節のモデル推定では rugarch で可能な、日経平均株価日次対数リターンと実現カーネルにのみ用いた最尤推定により行った。このため、ξは推定できず、VI 理論値推定も$\xi = 0$として行った（つまり、Duan(1995)の SDF を用いた）。

期中各日のプライシング・エラー（＝推定理論値 － 日経平均 VI 終値観測値）の平均は 0.93（平均過大評価）で、平均絶対誤差は 3.12、平均 2 乗誤差は 4.25 とかなり大きなものであった。図はプライシング・エラーの時系列プロットである。



6　終わりに

本稿ではHHTWによる実現GARCHモデルと指数アフィンSDFの組み合わせを用いたボラティリティ指数の評価方法を簡単に紹介し、その方法を日経平均VIに適用した結果を報告した。HHTWの主要な主張の一つは$\xi = 0$の制約を課さない一般の指数アフィンSDFを用いることの有用性であるが、本稿ではこの制約を課したバージョンによる計算例を紹介したに過ぎず、本格的な実証分析は行っていない。今後、GARCH型モデルによる日経平均VI評価の検証を進め、別な機会に結果を報告したい。

参考文献

CBOE. 2021. CBOE VIX White Paper. https://cdn.cboe.com/resources/vix/vixwhite.pdf.

Galanos, A. 2022. Introduction to the rugarch package (Version 1-4.3). https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/vignettes/Introduction_to_the_rugarch_package.pdf.

Hansen, P.R., Huang, Z. 2016. Exponential GARCH modeling with realized measures of volatility. *J. Business & Economic Statistics* **34**: 269-287.

Hansen, P.R., Huang, Z., Shek, H. 2012. Realized GARCH: A joint model of returns and realized measures of volatility,” *J. Applied Econometrics* **27**: 877-906.

Hansen, P.R., Huang, Z., Tong, C., Wang, T. 2021. Realized GARCH, CBOE VIX, and the volatility risk premium. arXiv:2112.05302v1.

Heston, S. Nandi, S. 2000. A closed form GARCH option valuation model. *Review of Financial Studies* **13**: 585-625.

Huang, Z., Wang, T., Hansen, P.R. 2017. Option pricing with the realized GARCH model: An analytical approximation approach. *J. Futures Markets* **37**: 328-358.

Oxford-Man Institute. 2022. Realized Library. https://realized.oxford-man.ox.ac.uk/. 2022 年 6 月 1 日アクセス。

Takahashi, M., Omori, Y., Watanabe, T. 2009.　Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously. *Computational Statistics and Data Analysis* **53**: 2404–2406.

日本経済新聞社. 2021.「日経平均ボラティリティ・インデックス」リアルタイム算出要領. https://indexes.nikkei.co.jp/nkave/archives/news/20211124J_2.pdf.

深澤正彰.　2022a.　ボラティリティ指数の理論.　大阪取引所『先物・オプションレポート』**31**(11).

深澤正彰.　2022b.　インプライド・ボラティリティの数理.　大阪取引所『先物・オプションレポート』**31**(12),

大屋幸輔. 2022.　オプションの残存期間とボラティリティ・インデックスの算出.　大阪取引所『先物・オプションレポート』**34** (5).

渡部敏明. 2007.　モデルフリー・インプライド・ボラティリティ.　大阪証券取引所『先物・オプションレポート』**19** (12).

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。