



日本取引所グループ
JAPAN EXCHANGE GROUP

JPX WORKING PAPER

JPXワーキング・ペーパー

人工市場シミュレーションによる
ボラティリティの非対称性の要因分解

橋本 龍二
村山 友理
和泉 潔

2025年3月14日

Vol. 47

備考

JPX ワーキング・ペーパーは、株式会社日本取引所グループ及びその子会社・関連会社（以下「日本取引所グループ等」という。）の役職員並びに外部研究者による調査・研究の成果を取りまとめたものであり、学会、研究機関、市場関係者他、関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図しております。なお、掲載されているペーパーの内容や意見は筆者ら個人に属し、日本取引所グループ等及び筆者らが所属する組織の公式見解を示すものではありません。

人工市場シミュレーションによる ボラティリティの非対称性の要因分解*

橋本 龍二[†], 村山 友理[‡], 和泉 潔[‡]

2025年3月14日

概要

本研究では、人工市場による対照実験を行い、ボラティリティの非対称性と呼ばれる stylized fact の要因分解を行った。先行研究を踏まえ、Volatility feedback (VF) と Asymmetric positive feedback (APF) と呼ばれる二種類の典型的な投資行動をエージェントモデル上に位置付け、VF と APF の要素を反映した場合としない場合の複数の設定でマルチエージェントシミュレーションを実施した。各シミュレーション結果から、Mixture Sampler を用いてボラティリティの非対称性の程度を推定したことにより、ボラティリティの非対称性は、VF というリスク回避的な投資家特性を中心に、APF という投資行動との相互作用も相まって生じることが分かった。また、VF と APF との間の循環的な作用の存在について考察した。

* 本稿に示されている内容は、筆者ら個人に属し、株式会社日本取引所グループ及びその子会社・関連会社及び著者らが所属する組織の公式見解を示すものではありません。また、ありうべき誤りは、すべて筆者個人に属します。

[†] 東京大学大学院工学系研究科

1 はじめに

本研究では、人工市場シミュレーションにより、株式市場で広く観測されるマクロ現象であるボラティリティの非対称性の発生メカニズムを分析する。ボラティリティの非対称性 (Black, 1976) とは、株価が上がった日の翌日より、下がった日の翌日の方がボラティリティが高くなりやすい、という金融市場の stylized facts (Cont, 2001) の一つである。ボラティリティの非対称性のメカニズムを理解することは、株式のリスク評価の観点で重要である。

ボラティリティの非対称性の要因候補とされる典型的な投資行動として、Volatility feedback (VF) と Asymmetric positive feedback (APF) が挙げられる。VF (Campbell and Hentschel, 1992; Pindyck, 1984) は、ボラティリティの上昇を受け株の需要が下がる、というリスク回避的な投資行動である。APF (Sentana and Wadhvani, 1992; Antoniou et al., 1998) は、パニック売りや損切りの様な、株価の下落を根拠に株を売る、という非合理的投資行動が関係している。VF や APF のボラティリティの非対称性に対する寄与の大きさや、各要素の相互作用は、実データから抽出するのが困難である。

本研究では、VF と APF の相互作用を明らかにするために、人工市場を用いた対照実験を行う。人工市場とは、計算機上に再現された金融市場である。人工市場の研究では、個々の投資家をエージェントとしてモデル化し、彼らに Market microstructure を再現した仮想的な市場上で取引を行わせることで、マクロ現象を発生させる微視的な構造を把握することを目指す。本研究では、エージェントモデルに VF, APF を位置付け、各要素を追加した場合としない場合の複数のシミュレーション結果を比較することで、各要素がボラティリティの非対称性を発現させるメカニズムを考察した。

実験の結果、1) エージェントが APF の特性のみを持つ場合、ボラティリティの非対称性は発生しないこと、2) エージェントが VF の特性のみを持つ場合、ボラティリティの非対称性が発生すること、3) APF は VF とともにエージェントモデルに反映された場合、ボラティリティの非対称性をより強める効果を持つことが明らかになった。また本研究では、実験結果を受け、ボラティリティの非対称性の背景には VF と APF の循環的な作用が存在する、とする新たな仮説を提唱した。

2 関連研究

2.1 ボラティリティの非対称性

株式市場では、ボラティリティの非対称性が観測されてきた。例えば、非対称性を考慮した ARCH 型モデル (Nelson, 1991; Glosten et al., 1993; Ding et al., 1993) は、考慮していないモデルよりも実データへの適合度が高い事が報告されてきた。また、以下の非対称性を考慮した確率的ボラティリティ変動 (Asymmetric stochastic volatility, ASV) モデルによって、周辺尤度が向上することも報告され

た (Omori et al., 2007).

$$r_t = \epsilon_t \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) \quad (1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} = \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma^2 \end{pmatrix}\right) \quad (3)$$

ただし、 r_t は対数株価変化率、 h_t はボラティリティの潜在変数である。 $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ は確率変数が正規分布に従うことを表す。 ASV モデルにおいて、ボラティリティの非対称性は、観測方程式 (1) と状態方程式 (2) の誤差項 ϵ_t, η_t の間の相関係数 ρ の値が負であることとして表現される。 Omori et al. (2007) は、ASV モデルのパラメータ μ, ϕ, ρ, σ の効率的なサンプリング手法である Mixture Sampler を提案し、TOPIX の日次収益率のデータにおいて ρ の事後平均が -0.362 であることを報告した。

ボラティリティの非対称性の要因に関して、これまで複数の理論仮説が提唱されてきた。一つ目は、レバレッジ効果である。 Black (1976) は、モジリアーニ・ミラー (MM) 定理において企業価値のボラティリティが定数であると仮定することで、株価のボラティリティが負債・株主資本比率 (レバレッジ率) の増加関数となることを示した。 Black (1976) は、当モデルにおいてボラティリティのリターンに対する弾力性が負となることからボラティリティの非対称性を説明した。 Christie (1982) は、米国 379 企業の財務データを用いて、株価のボラティリティがレバレッジ率の増加関数であることを確認した。しかし、負債を持たない企業の株価においてもボラティリティの非対称性が観測されることから (Smith, 2024)、レバレッジ効果は唯一の要因ではないことが示唆される。二つ目は、Volatility feedback (VF) である。 Campbell and Hentschel (1992); Pindyck (1984); French et al. (1987) は、ボラティリティの上昇は、リスク回避的な投資家の需要の減少、ひいては買い控え並びに売り意欲の増幅に繋がり、株価が下落すると主張した。実証的には、Campbell and Hentschel (1992) は、VF を反映した QGARCH モデルを米国の株価データに適用し、VF 効果が統計的に有意であることを確認した。レバレッジ効果と VF は、いずれも効率的市場仮説を前提としている。しかし、投資家が完全に合理的であるという仮定は、非現実的である。現実には、投資家間に情報格差が存在し、株価が情報効果 (Nirei et al., 2020) を持つと考えるのが自然である。 Shiller (1984) は、株価が上がれば株を買い、下がれば売る、という投資行動を Positive feedback trader (PFT) と名付け、PFT が株価変動を増幅させ、ボラティリティを高める要因となることを示した。 Sentana and Wadhvani (1992) は、PFT の存在を実証的に確認するとともに、PFT は株価の下落時に、上昇時以上に顕著になることを確かめた。こうした、リターンに対して非対称に発現する PFT を、本研究では Asymmetric positive feedback (APF) と呼ぶ。 APF は、ボラティリティの非対称性の一因であるとされる。例えば、Antoniou et al. (1998) は、株式指数先物市場の導入前後の株式市場におけるボラティリティの非対称性を GJR GARCH モデル (Glosten et al., 1993) によって調べ、導入後に非対称性の程度が軽減したことから、株式指数先物市場の導入が新たな情報チャンネルを提供し市場の効率性を高めると主張するとともに、APF がボラティリティの非対称性に寄与していると結論付けた。しかし、APF がボラティリティの非対称性を発生させるメカニズムを、VF などの他の要因との相互作用を含めて検証した研究はまだない。

2.2 人工市場

人工市場は、現実の金融市場を計算機上に再現したマルチエージェントシステムである。典型的な人工市場では、複数体の確率的エージェントに順に注文を提出させ、彼らの注文をダブルオークション方式で処理することにより、約定価格や取引数量といった時系列データを生成する。シミュレーション結果に最も重要な影響を及ぼすエージェントモデルは、行動経済学などで知られる投資家特性と整合的であるのが望ましい。標準的なエージェントモデルとして、FCNAgent (Chiarella and Iori, 2002; Chiarella et al., 2009) が挙げられる。FCNAgent は、時刻 t において市場価格 p_t とファンダメンタル価格 p_t^f を所与とし、次式で予想価格 $\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j$ を算出する。

$$\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j = \frac{1}{w^{j,f} + w^{j,c} + w^{j,n}} \left(\frac{w^{j,f}}{\tau_t^{j,f}} \log \frac{p_t^f}{p_t} + \frac{w^{j,c}}{\tau_t^j} \log \frac{p_t}{p_{t-\tau_t^j}} + w^{j,n} \epsilon_t \right) \quad (4)$$

$$\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j = p_t \exp \left(\tau_t^j \hat{p}_{t+\tau_t^j}^j \right) \quad (5)$$

ただし、 n はエージェント数、 $j \in \{1, \dots, n\}$ は個々のエージェントに割り当てられた番号である。 $\tau_t^{j,f}$ 、 τ_t^j はそれぞれエージェント j の平均回帰時間と time window size である。 $w^{j,f}$ 、 $w^{j,c}$ 、 $w^{j,n}$ は、エージェント j の予想価格を構成する三要素にかかる係数であり、エージェント毎に $w^{j,f} \sim Ex(\lambda^f)$ 、 $w^{j,c} \sim Ex(\lambda^c)$ 、 $w^{j,n} \sim Ex(\lambda^n)$ によって決定される。 $Ex(\lambda)$ は、期待値 λ の指数分布を表す。式 (4) 第一項は fundamental 項であり、市場価格が $\tau_t^{j,f}$ 時点でファンダメンタル価格へ回帰する、という予測を表す。第二項は chartist 項であり、過去 τ_t^j 時点分の市場価格のトレンドが今後も継続する、という予測を表す。第三項は noise 項であり、 $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, (\sigma^n)^2)$ をサンプリングすることで決定する。FCNAgent は、fundamental, chartist, noise の三要素に因んで名付けられた。

Chiarella and Iori (2002) は、予想価格 $\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j$ と固定注文マージン $k^j \in [k_{min}, k_{max}]$ 、市場の売り、買いの最良気配値 p_t^{bid} 、 p_t^{ask} を用いて、以下の様なリスク中立的な売買意思決定則を提案した。

- $p_t < \hat{p}_{t+\tau_t^j}^j$ の時、価格 $\min(\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j(1 - k^j), p_t^{bid})$ で買い注文を立てる。
- $\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j < p_t$ の時、価格 $\max(\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j(1 + k^j), p_t^{ask})$ で売り注文を立てる。

Chiarella et al. (2009) は、現金、株式保有高 c_t^j 、 w_t^j 、リスク回避度 α^j を用いて以下の様にリスク回避的に注文を決定する枠組みを提案した。エージェント j の効用 U_t^j を、次式で定義する。

$$U_t^j = - \exp \left\{ -\alpha^j (w_t^j p_t + c_t^j) \right\} \quad (6)$$

予想価格 $\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j$ と予想ボラティリティ V_t^j を用いると、将来の期待効用 $\mathbb{E}_t[U_{t+\tau_t^j}^j]$ の最大化問題によって

導出されるエージェント j の需要関数 D_t^j は

$$D_t^j(p) = \frac{\log \frac{\hat{p}_{t+\tau_t^j}^j}{p}}{\alpha^j V_t^j p} \quad (7)$$

と書ける。現在の保有高 w_t^j が最適保有高になる株価 p^* は、 $D^j(p^*) = w_t^j$ を満たす。また、予算制約 $0 \leq c_t^j$ 、空売りの禁止 $0 \leq D_t^j(p)$ を課すことで、最小購入価格 p_m 、最大売却価格 p_M をそれぞれ以下の方程式を満たす値に定める。

$$p_m \{D_t^j(p_m) - w_t^j\} = c_t^j, D_t^j(p_M) = 0 \quad (8)$$

Chiarella et al. (2009) は、次の様な注文決定則を提案した。 \tilde{p} を区間 $[p_m, p_M]$ の一様分布 $U(p_m, p_M)$ からサンプリングし、以下の様に注文を決定する。

- $\tilde{p} < p^* \rightarrow$
 - $p_t^{ask} < \tilde{p} \rightarrow$ 数量 $D_t^j(p_t^{ask}) - w_t^j$ の成行買い注文
 - $\tilde{p} < p_t^{ask} \rightarrow$ 数量 $D_t^j(\tilde{p}) - w_t^j$ 、価格 \tilde{p} の指値買い注文
- $p^* < \tilde{p} \rightarrow$
 - $\tilde{p} < p_t^{bid} \rightarrow$ 数量 $w_t^j - D_t^j(\tilde{p})$ 、価格 \tilde{p} の指値売り注文
 - $p_t^{bid} < \tilde{p} \rightarrow$ 数量 $w_t^j - D_t^j(p_t^{bid})$ の成行売り注文

CARA 効用関数 (6) による注文決定則は、売り注文時に “impatient” になる、という傾向が指摘されている。すなわち、エージェント j が株価が下落すると予想 ($p_M = \hat{p}_{t+\tau_t^j}^j < p_t$) する場合、成行または最良気配に近い指値での売り注文を立てやすいのに対し、上昇を予想する場合は、最良気配から遠く、約定までに比較的時間のかかる指値での買い注文を立てやすい。

人工市場を用いて現象の発生要因を微視的に分析した研究には、投資家の予想株価のばらつきと需給不均衡が株価暴落後の反発に寄与していることを示した Yagi et al. (2012) がある。しかし、ボラティリティの非対称性を扱った研究はまだない。

3 実験

本研究の実験では、図1の様に、ボラティリティの非対称性の要因候補である VF と APF をエージェントに反映した設定としない設定の 4 (= 2²) 種類のシミュレーションを実施し、Mixture Sampler (Omori et al., 2007) によってそれぞれのシミュレーションの結果得られる人工データにおけるボラティリティの非対称性を定量化した。また、実データを用いて同様にボラティリティの非対称性を調べ、人工データの結果と比較した。

3.1 実データ

現実の株価データとして、東京証券取引所の提供する FLEX-FULL ヒストリカルデータを利用した。銘柄は 4568, 6502, 7203, 8306, 9202, 9437、期間は 2015 年 1 月 4 日から 2021 年 8 月 27 日とした。

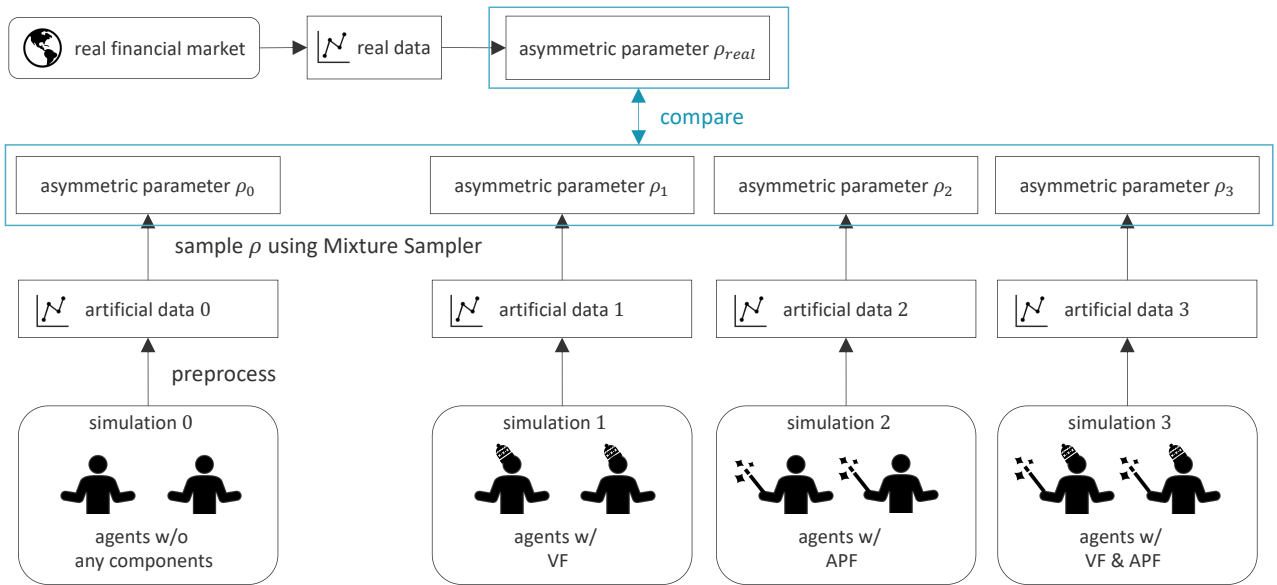


図 1: 実験の全体図. VF は Volatility feedback を, APF は Asymmetric positive feedback を表す.

それぞれの銘柄の日次終値を集計し, 対数リターン r_t を計算した結果, 時系列長 1,427 のリターン系列を得た.

3.2 シミュレーション設定

図 1 の様に, 四種類の設定 (simulation 0 ~ 3) での人工市場シミュレーションを異なる乱数シードで五回実行した. 共通の設定は, 以下の通りである.

- 時点数: n 体の FCNAgent のうち無作為に選ばれた一体が注文を立て, 約定処理が行われる期間を, 一時点と定義する. 本実験では, 一回のシミュレーションで, $2,200 \times 1,500$ 時点分実行した. すなわち, 2,200 時点を一日と定義し, 1,500 日分のシミュレーションを行った. 2,200 時点のうち, 200 時点は約定処理を行わず, 注文のみを収集する期間とした.
- 市場: 市場数は 1 とした. 市場のティックサイズは 0.5×10^{-3} , 初期市場価格は $p_0 = 300.0$ とした. ファンダメンタル価格は $\forall t p_t^f = 300.0$ とした.
- エージェント: $n = 5,000$, $\lambda^f = 10.0$, $\lambda^c = 1.7$, $\lambda^n = 1.0$, $\tau^{j,f} = 200$, $\tau_t^j = 130 \times (1 + w^{j,f}) / (1 + w^{j,c})$, $c_0^j \sim U(0, 30,000)$, $w_0^j \sim U(0, 100)$. 方程式 (8) の解は, 二分法により数値計算した.

VF, APF に関連する設定は以下の通りである.

- VF を反映しない simulation 0, 2 では, 注文決定則を Chiarella and Iori (2002) とし, $k_{min} = 0.0$, $k_{max} = 0.01$ とした. 一方, VF を反映する simulation 1, 3 では, 注文決定則を Chiarella et al. (2009) とし, $\forall j \alpha^j = 0.06 \times (1 + w^{j,f}) / (1 + w^{j,c})$ とした.
- APF を反映する simulation 2, 3 では, FCNAgent の chartist 項を次式のように可変とし, $a^{j,c} = 3.0$ とした. 一方, APF を反映しない simulation 0, 1 では, chartist 項を不変 $\forall t w_t^{j,c} = w^{j,c}$

とした。

$$w_t^{jc} = \max\left(0, w^{jc} - 100a^{jc} \log \frac{p_t}{p_{t-\tau_t^j}}\right) \quad (9)$$

以上の様に、VF を、ボラティリティに対して需要 (7) が減少関数になる Chiarella et al. (2009) の注文決定則に対応づけた。一方、APF を、過去の株価変動に対して非対称に chartist 項の重みを変動させる (9) に対応づけ、株価の下落に対してトレンド追従の予想を強化する投資行動としてモデル化した。

実データと同様に、各シミュレーションの日次終値を集計し、対数リターン r_t を計算した結果、simulation 0 ~ 3 のそれぞれの設定で、時系列長 1,500 のリターン系列を 5 サンプル得た。

3.3 Mixture Sampler

一銘柄の実データまたは一回のシミュレーション結果によるリターン系列に対し Mixture Sampler を適用し、 ρ の事後分布からのサンプルを 5,000 だけ得た。 ρ のサンプルの標本平均、標本標準偏差を算出することで、事後平均、事後標準偏差とした。複数銘柄、複数回のシミュレーション結果をもとに同様の計算を行うことで、 ρ の事後平均の標本平均、事後標準偏差の標本標準偏差を記録した。

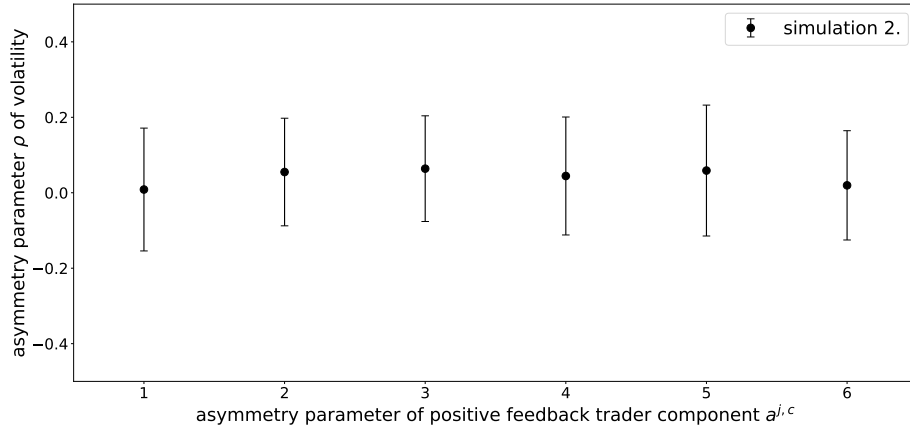
4 実験結果

		pos-mean	pos-std
real		-0.170 (± 0.079)	0.074 (± 0.014)
sim	VF APF		
0		0.056 (± 0.015)	0.169 (± 0.024)
1	✓	-0.249 (± 0.053)	0.061 (± 0.007)
2	✓	0.064 (± 0.077)	0.140 (± 0.021)
3	✓ ✓	-0.296 (± 0.038)	0.057 (± 0.007)

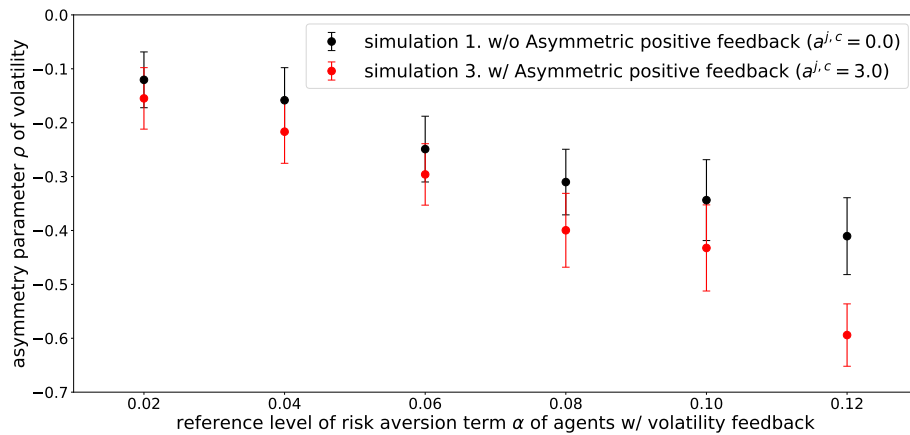
表 1: 実データ (real) と人工データ (sim) に対し、Mixture Sampler によって ρ をサンプリングした結果。pos-mean は ρ の事後平均、pos-std は ρ の事後標準偏差を表す。各結果の標本平均、標本標準偏差を表示している。

3 章で概説した実験の結果は、表 1 の通りである。実データ (real) で非対称性パラメータ ρ が有意に負となったことから、本研究でもボラティリティの非対称性が観測された。

また、simulation 0 では ρ の事後平均が 0.056 なのに対し、simulation 1 では -0.249 であることから、VF はボラティリティの非対称性に寄与することが分かった。simulation 2 ではボラティリティの非対称性は発生しなかった。図 2a は simulation 2 のうち APF のパラメータ a^{jc} の値を 1.0 ~ 6.0 と変化させた時の ρ のサンプリング結果である。図 2a より、APF は、エージェントモデルに VF が反映されていない場合は、ボラティリティの非対称性を発生させる要因にはならないことが分かった。



(a) simulation 2 において、 $a^{j,c}$ の値を変えた時の ρ の変化



(b) simulation 1, 3 において、 α^j の値を変えた時の ρ の変化

図 2: 感度分析の結果.

一方、simulation 3 は、シミュレーション 1 よりも ρ の事後平均の値が低い結果となった。図 2b は、simulation 1, 3 において α^j の値を 0.02 ~ 0.12 と変化させた時の ρ のサンプリング結果である。2b より、エージェントのリスク回避度 α^j が高いほどボラティリティの非対称性が顕著になることに加えて、エージェントモデルに VF が反映されている場合、APF はボラティリティの非対称性を強める傾向にあることが分かる。

5 考察

4 章により、1)APF は、投資家がリスク中立的であればボラティリティの非対称性を発生させないこと、2)VF は、ボラティリティの非対称性を発生させること、3)APF は、投資家がリスク回避的である場合、ボラティリティの非対称性を強める効果を持つこと、の三点が明らかになった。以上の結果を考察する。1) は、エージェントが Chiarella and Iori (2002) のリスク中立的な注文決定則を取る場合、APF

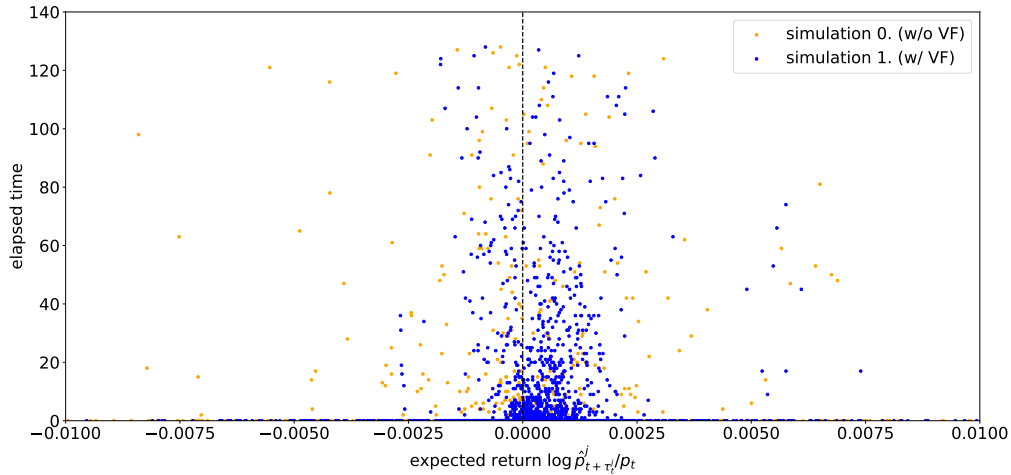


図 3: simulation 0, 1 において, エージェントの予想リターンと, 予想リターンをもとに立てた注文が約定するまでに経過した step 数の関係を表す散布図.

の特性により株価が下落すると予想したとしても, 予想価格にマージンを乗せた指値 $\hat{p}_{t+\tau_t}^j (1+k^j)$ で注文を出す傾向にあることで, 当該予想が直ちに市場価格に反映されるとは限らないことと対応する. 一方, リスク回避的な投資家が APF の要素を持つ場合, 株価の下落時にさらに下落すると予想するのに加え, Chiarella et al. (2009) の注文決定則により, 当該予想を反映した注文が速やかに約定しやすい. 図 3 は, Chiarella et al. (2009) の注文決定則の特徴を示す散布図である. 図より, simulation 1 では, エージェントの予想リターンが負である場合の注文は, 正である場合の注文に比べ, 約定に時間を要した注文が少ないことが分かる. こうした注文決定則の特徴により, 3) の結果が得られたと考えられる.

3) の結果より, ボラティリティの非対称性というマクロ現象の背景に, 図 4 のように VF と APF の循環的な作用が存在することが示唆される. 起こりうるシナリオは, 次の通りである.

1. ボラティリティが上昇すると, リスク回避的な投資家は VF により需要が減少し, 株価が下落する.
2. 株価が下落すると, APF の要素を持つ投資家は, 株価が更に下落する, という予想を立てる.
3. 株価が更に下落すると予想した投資家は, 下落のリスクを避けるために, 不利な価格であっても早くポジションを解消することを優先した売り注文を立てる.
4. 約定しやすい売り注文が増加し, 取引が活発化すると, ボラティリティが上昇し, 再び VF を誘発する.

以上より, ボラティリティの非対称性は, リスク回避的な投資家特性を中心に, APF という投資行動との相互作用も相まって生じることが分かった. この結果をもとに, 暗号資産市場において価格上昇の後にボラティリティが上昇しやすい (Baur and Dimpfl, 2018) という経験的観測の背景を類推する. Baur and Dimpfl (2018) によれば, 暗号資産市場では “fear of missing out” (価格上昇時に “impatient” に取引行動を起こすこと) が観測されている. 加えて, 一般に, 暗号資産は株式市場よりも価格変動が激しいことから, 市場参加者は比較的风险許容度が高いと考えられる. こうした, 投資

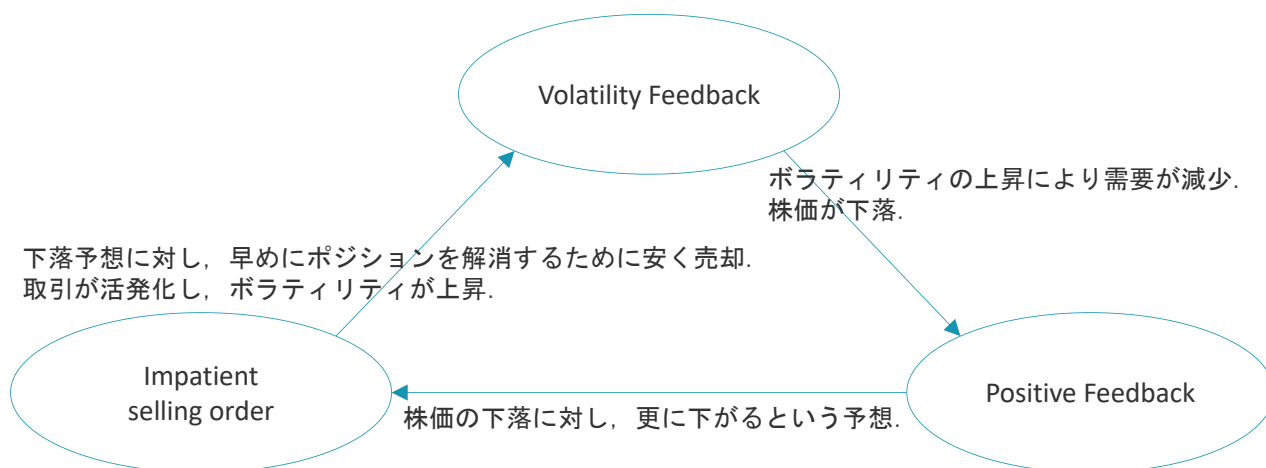


図 4: VF と APF の循環的な作用の構造を示す概念図.

家のリスク選好性と価格変動への反応の違いが、暗号資産市場における株式市場とは逆のボラティリティの動態に帰結している可能性がある。

6 おわりに

本研究では、人工市場シミュレーションにおけるエージェントモデルの対照実験を通じて、ボラティリティの非対称性の発生メカニズムを分析した。実験により、VF と APF という二つの投資家特性の相互作用によって、ボラティリティの非対称性が発生することが明らかになった。また実験結果を受け、VF と APF が発生させる、株価の下落とボラティリティの上昇のスパイラルの存在を示唆した。

今後の課題は、より精緻な定量評価の実施である。本実験では、Mixture Sampler による非対称性パラメータ ρ のサンプリング結果を指標として実/人工データを比較した。しかし、本指標はボラティリティの非対称性を示す目安に過ぎないため、シミュレーション結果の現実との整合性を十分に評価したとは言えない。ゆえ、実/人工データ間の類似度を計測する手法を提案し、VF や APF のような特定の投資行動が現実の価格決定メカニズムに与えている影響の大きさを定量化する必要がある。

参考文献

- Antoniou, A., Holmes, P., Priestley, R. 1998. The effects of stock index futures trading on stock index volatility: An analysis of the asymmetric response of volatility to news. *Journal of Futures Markets*, 18 (2), 151-166.
- Baur, D. G., Dimpfl, T. 2018. Asymmetric volatility in cryptocurrencies. *Economics Letters*, 173, 148-151.
- Black, F. 1976. Studies of stock price volatility changes. In *Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, Washington DC.*, 177-181..
- Campbell, J. Y., Hentschel, L. 1992. No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of Financial Economics*, 31 (3), 281-318.

- Chiarella, C., Iori, G., Perello, J. 2009. The impact of heterogeneous trading rules on the limit order book and order flows. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33 (3), 525-537.
- Chiarella, C., Iori, G. 2002. A simulation analysis of the microstructure of double auction markets. *Quantitative Finance*, 2 (5), 346–353.
- Christie, A. A. 1982. The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10 (4), 407-432.
- Cont, R. 2001. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1 (2), 223-236.
- Ding, Z., Granger, C. W., Engle, R. F. 1993. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1 (1), 83-106.
- French, K. R., Schwert, G., Stambaugh, R. F. 1987. Expected stock returns and volatility. *Journal of Financial Economics*, 19 (1), 3-29.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., Runkle, D. e. 1993. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, 48 (5), 1779-1801.
- Nelson, D. B. 1991. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59 (2), 347–370.
- Nirei, M., Stachurski, J., Watanabe, T. 2020. Trade clustering and power laws in financial markets. *Theoretical Economics*, 15 (4), 1365-1398.
- Omori, Y., Chib, S., Shephard, N., Nakajima, J. 2007. Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference. *Journal of Econometrics*, 140 (2), 425-449.
- Pindyck, R. S. 1984. Risk, inflation, and the stock market. *The American Economic Review*, 74 (3), 335–351.
- Sentana, E., Wadhvani, S. 1992. Feedback traders and stock return autocorrelations: Evidence from a century of daily data. *The Economic Journal*, 102 (411), 415–425.
- Shiller, R. J. 1984. Stock prices and social dynamics. *Brookings Papers on Economic Activity*, 15 (2), 457-510.
- Smith, G. P. 2024. Why do firms with no leverage still have leverage and volatility feedback effects? *Journal of Empirical Finance*, 78, 101516.
- Yagi, I., Mizuta, T., Izumi, K. 2012. A study on the reversal mechanism for large stock price declines using artificial markets. In *2012 IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering & Economics (CIFER)*, 1-7.