

日経 225 オプションを用いた下方ジャンプ変動の計測

明治学院大学経済学部 生方雅人

1 はじめに

2000年代後期の世界金融危機とその後のIMFのチーフエコノミストの発言¹に見られるように、発生確率は低いものの資産価格が突発的に大きく下落するリスク、要するに資産価格収益率分布のテールリスクや下方ジャンプ変動 (Left jump variation: LJV) を緩和させる施策および管理強化の重要性が理論と実務の両面で認識されている。こうして資産価格過程のモデリングにおいては通常の連続な価格変動部分と不連続なジャンプ変動部分に分けて記述するのが一般的となりつつあり、その場合価格変化率の二次変動は連続な価格変動部分に起因する分散部分と不連続なジャンプの二次変動の和で表現される。また、資産価格理論においてリスク中立測度下での価格評価法が用いられるように、下方ジャンプ変動に関しても過去の高頻度データから事後的に評価する実現測度下での指標とは別に、オプション市場における取引価格や気配値情報から示唆されるフォワード・ルッキングなリスク中立測度下での指標が開発されている。本稿では後者について検討する。第一に、Bollerslev and Todorov (2014) と Bollerslev et al. (2015) によって提案されたリスク中立測度下における下方ジャンプ変動の推定量を簡潔に説明する。この推定量は理論的導出過程の一部を除けば連続時間価格過程の枠組みで特定のモデルに依存しないモデルフリーな統計量である。その意味では米国の Cboe Volatility Index (VIX) や我が国に関しては学術研究目的で公表されている大阪大学の Volatility Index Japan (VXJ) や日本経済新聞社の日経平均ボラティリティ・インデックス (日経平均 VI) といったモデルフリーの観点に比重を置いたボラティリティ指標²や、それらを2乗した値と実現分散の予測値で差をとった分散リスクプレミアムと呼ばれる指標³との比較検討が容易である。Andersen et al. (2019) は下方ジャンプ変動や分散リスクプレミアムを用いて我が国のマーケットリスクプレミアムの予測可能性について検討している。第二に、モデルフリーな下方ジャンプ変動の算出には幅広いディープ・アウト・オブ・ザ・マネー (DOTM) のプットオプションが必要である為、これまでの主な適用先は流動性が高く権利行使価格が細かく設定されている S&P500 オプションである。本稿では日経 225 オプションに適用可能であることを最初に例証した Andersen et al. (2019) の計算方法について簡単に説明し、我が国の下方ジャンプ変動の時系列特性について検討する。

¹So what are policymakers to do? First and foremost, reduce uncertainty. Do so by removing tail risks, and the perception of tail risks. –Olivier Blanchard, chief economist, IMF, *The Economist*, January 31, 2009.

²詳細は渡部 (2013) を参照のこと。

³詳細は渡部 (2014, 2016)、大屋 (2019) を参照のこと。

2 下方ジャンプ変動の測定方法

原資産価格 S_t がリスク中立測度下で以下のような一般的なジャンプ拡散過程に従うものとする。

$$dS_t/S_{t-} = (r_t - \delta_t) dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}} + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1) \tilde{\mu}^{\mathbb{Q}}(dx, dt). \quad (1)$$

$r_t, \delta_t, \sigma_t, W_t^{\mathbb{Q}}$ は瞬時的リスクフリーレート、原資産価格の瞬時的配当利回り、瞬時的ボラティリティ、リスク中立測度下でのブラウン運動である。資産価格のジャンプは右辺の最終項によって記述され、 x は対数価格のジャンプサイズ、 $\tilde{\mu}^{\mathbb{Q}}(dx, dt)$ はジャンプ強度過程 $\nu_t^{\mathbb{Q}}(dx)$ を含むマルチンゲールメジャーである。ここで、対数ジャンプサイズに関する時変の閾値 $k_t > 0$ に基づいてジャンプの二次変動全体から切り離れた下方部分を下方ジャンプ変動と呼ぶ。

$$LJV_{t,\tau}^{\mathbb{Q}} = \int_t^{t+\tau} \int_{x < -k_t} x^2 \nu_s^{\mathbb{Q}}(dx) ds. \quad (2)$$

Bollerslev and Todorov (2014) はジャンプ強度過程 $\nu_t^{\mathbb{Q}}(dx)$ について限定的にパラメトリックなモデルを仮定している。

$$\nu_t^{\mathbb{Q}}(dx) = \left(\phi_t^+ \times e^{-\alpha_t^+ x} 1_{\{x > 0\}} + \phi_t^- \times e^{-\alpha_t^- |x|} 1_{\{x < 0\}} \right) dx. \quad (3)$$

(3) 式はリスク中立測度下でのジャンプテールの傾斜の度合いを表す時変パラメータ α_t^+, α_t^- と水準を表す時変パラメータ ϕ_t^+, ϕ_t^- に依存しているが、上方と下方のジャンプテールが異なる形状をとる ($\alpha_t^+ \neq \alpha_t^-, \phi_t^+ \neq \phi_t^-$) ことや時変であることを許容している。また、(3) 式は閾値を超えるサイズのジャンプに対する仮定であり全サイズのジャンプに対する仮定ではないことから、既存モデルに比べ柔軟である。ここで、Bollerslev and Todorov (2014) で提案されたアウト・オブ・ザ・マネー (OTM) プットオプション価格の近似表現を用いると、下方ジャンプ変動の計測に関連するパラメータ α_t^-, ϕ_t^- は以下の2式をそれぞれ最小にする解として推定可能である。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_t^- &= \arg \min_{\alpha^-} \frac{1}{N_t^-} \sum_{i=2}^{N_t^-} \left| \log \left(\frac{O_{t,\tau}(k_{t,i})}{O_{t,\tau}(k_{t,i-1})} \right) (k_{t,i} - k_{t,i-1})^{-1} - (1 - (-\alpha^-)) \right|, \\ \hat{\phi}_t^- &= \arg \min_{\phi^-} \frac{1}{N_t^-} \sum_{i=2}^{N_t^-} \left| \log \left(\frac{e^{r_t \tau} O_{t,\tau}(k_{t,i})}{\tau F_{t,\tau}} \right) - (1 + \hat{\alpha}_t^-) k_{t,i} + \log(\hat{\alpha}_t^- + 1) + \log(\hat{\alpha}_t^-) - \log(\phi^-) \right|. \end{aligned} \quad (4)$$

$F_{t,\tau}, O_{t,\tau}(k_{t,i}), N_t^-$ は $t + \tau$ を満期とするフォワード価格、 i 番目のログマネネス $k_{t,i}$ ($0 < \dots < -k_{t,i} < \dots < -k_{t,N_t^-}$ for $k_{t,i}$) に対応する OTM オプション価格、後述の方法によって選択したパラメータ推定に用いるプットオプション数である。直感的に言えば、 α_t^- と ϕ_t^- は市場で観測される OTM プットの対数価格の減衰度と水準から推定される。(期待) 下方ジャンプ変動は (3) 式のジャンプ強度過程を (2) 式に代入することにより、

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[LJV_{t,\tau}^{\mathbb{Q}}] \approx \tau \phi_t^- e^{-\alpha_t^- |k_t|} (\alpha_t^- k_t (\alpha_t^- k_t + 2) + 2) / (\alpha_t^-)^3. \quad (5)$$

と表現できる。以下では、Nikkei NEEDS Financial Quest 2.0 より取得した日経 225 オプションデータを用いて (5) 式の LJV を算出した Andersen et al. (2019) の手続きを概略する。 α_t^- と ϕ_t^- を上手く推定する為には、通常の連続な価格変動に起因する分散部分の影響を受けにくいオプションを選択する必要がある。理論上、原資産価格のジャンプは満期までの期間が短く、アット・ザ・マネー (ATM) から大きく離れている DOTM オプション価格に対して優位を占める。しかしながら、満期までの期間が非常に短い日次オプションはマーケットマイクロストラクチャー効果に影響されやすいと指摘されている。このトレードオフを鑑みて、Andersen et al. (2019) は満期までの期間が約 1~6 週間までの通常限月取引オプションを使用している。また、価格にはアスクとビッドの仲値を用い、それに伴い権利行使価格とプットオプション価格に関する単調性の条件が成立しないデータが生じた場合には、取引量が多い方か ATM に近いオプションを採用している。Andersen et al. (2019) では日経 225 の OTM オプション数の制約により 2006 年 1 月から月次下方ジャンプ変動 (LJV) を用いた分析をおこなっているが、 α_t^- と ϕ_t^- の推定に用いる OTM オプションの識別方法に関しては Bollerslev and Todorov (2014) や Bollerslev et al. (2015) に倣い、ログマネネスが $-2.5 \times \sqrt{\tau} \sigma_t^{ATM}$ よりも小さいプットオプションを採用している。ここで、 σ_t^{ATM} は ATM のブラックショールズ・インプライド・ボラティリティである。(ただし、標本期間である 2006 年 1 月から 2017 年 6 月の内、2006 年 1 月から 2008 年 11 月は利用可能なオプション数を増やすため $-2 \times \sqrt{\tau} \sigma_t^{ATM}$ を下回るプットオプションを採用している。) 上述の手続きによって得られた OTM プットオプションと (4) 式を用いて時変パラメータ α_t^- と ϕ_t^- を推定するが、Bollerslev and Todorov (2014) と Bollerslev et al. (2015) に倣い、推定におけるノイズの影響を軽減する為に α_t^- はある期間で一定と仮定し、1 週間分プールした OTM プットオプションから推定している。他方、 ϕ_t^- については α_t^- の推定値 $\hat{\alpha}_t^-$ を所与として毎営業日ごとに推定をおこなっている。最後に (5) 式の (期待) LJV の計測では、 τ を 30 日 (1 ヵ月) とし、大きなサイズのジャンプに起因する二次変動を評価することを目的として、時変閾値は $k_t = 7 \times \sqrt{\tau} \sigma_t^{ATM}$ と

して設定している。こうして計算された日次 LJV を平均することで週次 LJV となり、週次 LJV を平均することで月次 LJV としている。

3 下方ジャンプ変動の時系列特性

図 1: 日経 225 オプションから示唆される下方ジャンプ変動

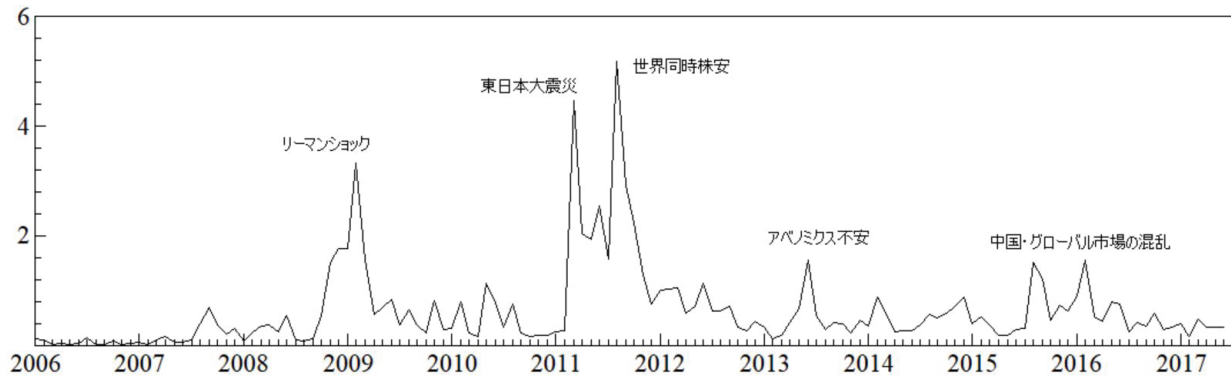


表 1: 下方ジャンプ変動の標本自己相関係数と Ljung-Box 検定統計量

ラグ (月次)	1	2	3	4	5	6
標本自己相関係数	0.60	0.49	0.41	0.26	0.33	0.17
LB(12)	141.66					

図 1 は月次下方ジャンプ変動を年率換算にして 100 を掛けたものであり、標本期間は 2006 年 1 月から 2017 年 6 月である。マーケットが比較的穏やかな 2006 年から 2007 年前半の時期は下方ジャンプ変動は低い値が続いている。一方、2008 年 9 月のリーマンショック後、2011 年 3 月に発生した東日本大震災直後、2011 年 8 月の世界同時株安、2013 年 5 月下旬から 6 月前半のアベノミクス拡大政策に対する不安が噴出した時期、2015 年後半から 2016 年前半にかけて中国・グローバル市場の混乱が生じた時期に下方ジャンプ変動は高い値が続いており、下方ジャンプ変動のクラスタリングが観察される。表 1 において、下方ジャンプ変動の 12 次までの自己相関がゼロであるという帰無仮説に対する Ljung-Box 検定統計量は 141.66 と大きく、帰無仮説は有意水準 1% で棄却される。また、1 次から 6 次までの標本自己相関係数の推移をみると時間差の増大と共に緩やかに減衰している。そこで、月次の下方ジャンプ変動に対して長期記憶性をもつ典型的な時系列モデルとして ARFIMA (1,d,0) モデルをあてはめたところ、自己相関の持続程度を規定

するパラメータ d の推定値は 0.38 であった。長期記憶性を有するリスク指標としてよく知られているボラティリティの典型的な d の値は 0.4 前後~0.5 であることを想定すれば、算出された下方ジャンプ変動は長期記憶性を有する可能性が示唆される。こうして、日経 225 オプションから示唆される下方ジャンプ変動は我が国の経済情勢やグローバル化する金融市場の動向と強く関連し、クラスタリングを有しながら変動している。

4 おわりに

本稿では日経 225 オプションを用いた下方ジャンプ変動の測定方法を解説し、下方ジャンプ変動の時系列特性について検討をおこなった。これまでの先行研究ではフォワード・ルッキングな特徴を持つ下方ジャンプ変動と将来のマーケットリスクプレミアムやクレジットスプレッドの関係を検討している。Andersen et al. (2019) は日米株価指数の超過収益率を自国の下方ジャンプ変動に回帰すると、米国の結果とは対照的に日本の下方ジャンプ変動は自国の超過収益率に対して有意な予測力を持つという結果は得られなかったが、米国の下方ジャンプ変動はとりわけドルベースで測った日本のマーケットリスクプレミアムに対して有意で高い説明力をもつことを明らかにしている。また、Ubukata (2019) はクレジットスプレッドを予測する伝統的な変数を考慮した場合でも、日本の下方ジャンプ変動は我が国における格付け A のグループで構成されるクレジットスプレッドや、格付け A と AA の社債利回りの差として観測されるデフォルトスプレッドに対して強い予測力を持つことを示している。我が国では 2015 年 5 月 25 日より通常限月取引に加え、新たに第 2 金曜日を除く各週金曜日の前営業日に取引最終日となる Weekly オプション⁴が導入された。導入の背景にある経済指標の公表や突発的なイベントに関連するリスクヘッジニーズの高まりは下方ジャンプ変動に対する認識の高さを示唆するものであり、マーケットマイクロストラクチャー効果を考慮した上で Weekly オプションのメリットを生かすような下方ジャンプ変動指標の開発やリスクマネジメントへの応用については本研究分野の今後の課題として検討する余地がある。

⁴日本取引所グループ HP (<https://www.jpx.co.jp/derivatives/products/domestic/225options/03.html>) を参照のこと。

参考文献

- [1] Andersen, T. G., Todorov, V., Ubukata, M. (2019) Tail risk and return predictability for the Japanese equity market, *Journal of Econometrics*, Forthcoming
- [2] Bollerslev T., Todorov, V. (2014) Time-varying jump tails, *Journal of Econometrics*, Vol.183, No.2, pp.168–180
- [3] Bollerslev T., Todorov V., Xu, L. (2015) Tail risk premia and return predictability, *Journal of Financial Economics*, Vol.118, No.1, pp.113–134
- [4] Ubukata, M. (2019) Jump tail risk premium and predicting US and Japanese credit spreads, *Empirical Economics*, Vol.57, No.1, pp.79–104
- [5] 大屋幸輔 (2019) 「周波数分解された分散リスク・プレミアムの予測力」 『先物・オプションレポート』 大阪取引所 Vol.31, No.1
- [6] 渡部敏明 (2013) 「モデル・フリー・インプライド・ボラティリティの計算方法について」 『先物・オプションレポート』 大阪取引所 Vol.25, No.7
- [7] 渡部敏明 (2014) 「分散リスク・プレミアム」 『先物・オプションレポート』 大阪取引所 Vol.26, No.9
- [8] 渡部敏明 (2016) 「日経 225 分散リスク・プレミアムの予測力」 『先物・オプションレポート』 大阪取引所 Vol.28, No.11

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。