先物・オプションレポート 2020 年 8 月号

価格インパクトを考慮した取引執行問題 I: 最適取引執行戦略

大阪大学　大学院経済学研究科
数理・データ科学教育研究センター [兼任]　大西匡光
大阪大学　大学院経済学研究科 博士後期課程
学術振興会　特別研究員　下清水慎

概要

金融市場には, その売買取引が資産の市場価格にインパクトを与えるようなラージ・トレーダーが存在する. 本稿 (8 月・ 9 月両号) では, 筆者らがごく最近に提案した一般化された市場価格インパクト・モデルのもとで, 先ず 8 月号で, 1 人のラージ・トレーダーによってなされる取引執行の最適化問題をマルコフ決定過程として定式化し, その最適執行戦略を導出して特徴付ける. 続いて 9 月号で, 2 人のラージ・トレーダーによって為される戦略的な取引執行の問題をマルコフ・ゲーム (確率ゲーム) として定式化し, そのマルコフ完全均衡を導出して特徴付ける. さらに幾種類かの設定のもとでの興味深い数値計算例を示す.

キーワード: ラージ・トレーダー, 価格インパクト, 取引執行, マルコフ・ゲーム, マルコフ完全均衡

1　はじめに

自らの売買取引が市場価格に影響を及ぼす機関投資家のような投資家を**ラージ・トレーダー**, あるいは**大口トレーダー**と呼び, その価格変動を**価格インパクト**と呼ぶ. 例えば, 巨額の年金ファンドを運用する年金運用機関は, その多数の年金加入者からの年金拠出によるキャッシュ・インフロー, 逆にその多数の年金加入者への年金給付によるキャッシュ・アウトフローが起こる定期的なタイミングにおいて, それぞれ大量・巨額の運用資産の購入, 売却を行わなければならず, そのような場合, 金融市場に大きな価格インパクトを及ぼす.

ラージ・トレーダーは, 売買取引の際の価格インパクトを**流動性リスク**として正しく認識し, さらにその将来の市場価格変動をも**価格リスク**として捉えて, それらを併せて適切に総合的なリスク・マネジメントを行わなければならない. こうした価格インパクトを考慮した取引執行戦略の研究が, Bertsimas and Lo [2], Almgren and Chriss [1] を初めとして, 近年, とりわけ, 我が国ではリーマン・ショックと呼ばれる, 先の世界的金融危機以降, アルゴリズム取引・高頻度取引への関心と相まって, 盛んに行われている (例えば Cartea, Jaimungal, and Penalva [3] 参照).

本稿においては, 離散時間の設定で, 筆者らが最近提案した一般化された価格インパクト・モデルに基づき,

I 先ずは, CARA (Constant Absolute Risk Aversion, 負の指数) 型の効用関数を持つラージ・トレーダーの, 購入計画期間における最終時点での手持ち資金 (富) からの期待効用を最大化する問題 (**最適取引執行問題**) を**マルコフ決定過程**として定式化し. 確率動的計画法を適用することより, **最適取引執行戦略**を導出する.

II 続いて, CARA 型の効用関数を持つ 2 人のラージ・トレーダーの, 購入計画期間における最終時点での手持ち資金 (富) からの期待効用を最大化しようとする問題 (**取引執行ゲーム**) を**マルコフ・ゲーム** (確率ゲーム) と

して定式化し, 際立った**マルコフ完全均衡取引執行戦略**を導出する．そして最後に, 上記の両問題に対して幾種類かの設定のもとでの数値計算例を与え, 比較静学分析を行う．

なお, 本稿の内容は, 主として, 筆者らの論文 Ohnishi and Shimoshimizu [9] に基づいている．

2　最適取引執行問題

定められた時点 $T+1$ ($\in \mathbb{Z}_+ := \{1, 2, \ldots\}$) までに, 規定量 Q ($\in \mathbb{R}$) の単一のリスク資産 (株式, 等) を購入しようとするラージ・トレーダーを考える．時点 t ($=1, \ldots, T$) における, ラージ・トレーダーの提出する購入注文量 (執行量) を q_t とし (ただし, 購入の時 $q_t > 0$, 売却の時 $q_t < 0$), 時点 t ($=1, \ldots, T, T+1$) における残余購入量を $\overline{Q}_t$ (ただし, $\overline{Q}_1 = Q$), また, 手持ち資金 (富) を w_t で表す．

リスク資産の時点 t における**市場価格** (気配値) を p_t とする．ラージ・トレーダーの提出する購入注文は, 大量であるが故にその価格 p_t では執行されず, 付加的なコストを伴い, **執行価格** $\widehat{p}_t$ で執行されるものとする．v_t を他の (スモール・) トレーダー達の総提出注文量を表す外生的な確率変数とし, λ_t, κ_t (≥ 0) で, それぞれラージ・トレーダーと他のトレーダー達の単位執行量あたりの価格の**感応度** (インパクト) を表すものとする．そして, 執行価格は線形価格インパクトモデル

$$\widehat{p}_t = p_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t), \quad t = 1, \ldots, T \tag{1}$$

に従うものとする．また, つぎの時点での市場価格 p_{t+1} は, 価格の**回復率** α_t ($\in [0,1]$), **回復速度** ρ ($\in [0, \infty)$) を用いて, **過去の価格インパクトの残存効果**を

$$\begin{aligned}
r_{t+1} &:= \sum_{k=1}^{t} (\lambda_k q_k + \kappa_k v_k)\, \alpha_k \mathrm{e}^{-\rho((t+1)-k)} \\
&= \mathrm{e}^{-\rho} \sum_{k=1}^{t-1} (\lambda_k q_k + \kappa_k v_k)\, \alpha_k \mathrm{e}^{-\rho(t-k)} + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t)\, \alpha_t \mathrm{e}^{-\rho} \\
&= [r_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t)\, \alpha_t]\, \mathrm{e}^{-\rho}, \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned} \tag{2}$$

と表せば, **ファンダメンタル価格** $p_t^f := p_t - r_t$ のダイナミクスは

$$\begin{aligned}
p_{t+1}^f &= p_{t+1} - r_{t+1} \\
&= p_t - r_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t)(1 - \alpha_t) + \varepsilon_t \\
&= p_t^f + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t)(1 - \alpha_t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned} \tag{3}$$

を満たす．したがって, 市場価格のダイナミクスは

$$p_{t+1} = p_t - (1 - \mathrm{e}^{-\rho}) r_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \left\{ \alpha_t \mathrm{e}^{-\rho} + (1 - \alpha_t) \right\} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T$$

と表される．ただし, ε_t は, 時点 t から 時点 $t+1$ までの公的な情報の更新に伴う確率変数とし, 時点 $t+1$ において, ラージ・トレーダーによって認識されるものとし, 列 $(v_t, t = 1, \ldots, T)$, $(\varepsilon_t, t = 1, \ldots, T)$ は, それぞれ, 独立な確率変数列で,

$$v_t \sim N(\mu_{v_t}, \sigma_{v_t}^2); \quad \varepsilon_t \sim N(\mu_{\varepsilon_t}, \sigma_{\varepsilon_t}^2) \tag{4}$$

と従い, さらに, それらの列は互いに独立であるとする.

ラージ・トレーダーの残余執行量に関しては,

$$\overline{Q}_{t+1} = \overline{Q}_t - q_t, \quad t = 1, \dots, T \tag{5}$$

を満たし, また手持ち資金 (富) に関しては,

$$w_{t+1} = w_t - \widehat{p}_t q_t = w_t - \{p_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t)\} q_t, \quad t = 1, \dots, T \tag{6}$$

と表せる.

最後に, このモデルにおいては, $(1-\alpha_t)\lambda_t$, $\alpha_t\lambda_t$, $\alpha_t\lambda_t \mathrm{e}^{-\rho k}$ が, それぞれ, ラージ・トレーダーの執行による, **恒久的インパクト**, **一時的インパクト**, **過渡的インパクト**を表している (図 1 参照).

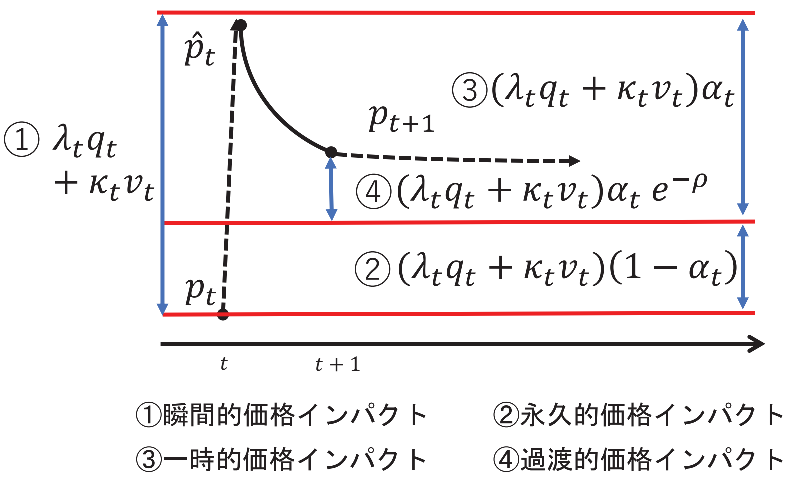

図 1　価格インパクトの図による説明

注 2.1　$((v_t, \varepsilon_t), t = 1, \dots, T)$ が (相関を持つ) 2 変量正規分布に従う, 独立な 2 変量確率ベクトル列としても, 煩雑にはなるが, 同様の分析が可能である.

2.1　マルコフ決定過程としての定式化

ラージ・トレーダーの最適取引執行問題を, 下記のようなマルコフ決定過程として定式化し, 分析する.

- 時点 t $(= 1, \dots, T)$ での**状態**は 4 つ組

$$s_t := (w_t, p_t, \overline{Q}_t, r_t) \in \mathbb{R}^4 \tag{7}$$

で表される.

- 時点 $t\ (=1,\dots,T)$ での履歴に依存しない 1 ステージの (非確率的な) **意思決定規則** f_t は状態 $s_t \in S := \mathbb{R}^4$ を**行動** $q_t = f_t(s_t) \in A := \mathbb{R}$ に写すボレル可測関数

$$f_t : s_t \in S = \mathbb{R}^4 \longmapsto q_t \in A = \mathbb{R} \tag{8}$$

として定義される.

- **状態推移のダイナミクス**は, 式 (2), (4), (6), (7) を纏めて

$$s_{t+1} = h_t\left(s_t, q_t, (v_t, \varepsilon_t)\right), \quad t = 1,\dots,T \tag{9}$$

と表される.

- ラージ・トレーダーへの **(効用) ペイオフ**は最終時点 $T+1$ でのみ発生し,

$$g_{T+1}\left(s_{T+1}\right) := \begin{cases} -\exp\{-R\, w_{T+1}\}, & \overline{Q}_{T+1} = 0; \\ -\infty, & \overline{Q}_{T+1} \neq 0 \end{cases} \tag{10}$$

と定義する, ただし $R\ (>0)$ はラージ・トレーダーの**絶対的リスク回避度**を表すパラメータである. したがって, 本稿では, 計画期間内で, 丁度 Q を執行する "堅い制約" を課す場合を扱う.

- **マルコフ取引執行戦略** π は 1 ステージの意思決定規則の列

$$\pi := (f_1,\dots,f_t,\dots,f_T) \tag{11}$$

と定義され, その全体を Π_{M} で表す. また, マルコフ取引執行戦略 $\pi \in \Pi_{\mathrm{M}}$ の時点 $t\ (=1,\dots,T)$ 以降の**部分取引執行戦略**を

$$\pi_t := (f_t,\dots,f_T) \tag{12}$$

で表し, その全体を $\Pi_{\mathrm{M},t}$ で表す.

さて, CARA 型の効用関数を持つ, リスク回避的なラージ・トレーダーの, 最終時点 $T+1$ での手持ち資金 (富) w_{T+1} からの期待効用を最大にする動的取引執行戦略を求める問題を考える. このラージ・トレーダーの取引執行戦略を π とし, π のもとでの, 時点 $t\ (=1,\dots,T,T+1)$, 状態 $s_t\ (\in S)$ からの期待効用を

$$V_t^{\pi}[s_t] = \mathbb{E}_t^{\pi}\left[g_{T+1}\left(s_{T+1}\right)\middle| s_t\right] \tag{13}$$

と定義する, ただし, $\mathbb{E}_t^{\pi}[\,\cdot \mid \cdot\,]$ は, 取引執行戦略を π としたときの, 時点 t での条件付き期待値を表す.

注 2.2　最終時点 $T+1$ における富 w_{T+1} が正規分布に従うものとすると, 正規確率変数の積率母関数を思い出せば,

$$\mathbb{E}\left[-\exp\{-R\, w_{T+1}\}\right] = -\exp\left\{-R\left(\mathbb{E}[w_{T+1}] - R\,\mathrm{Var}[w_{T+1}]\right)\right\} \tag{14}$$

と計算されるので, この場合, リスク回避パラメータを R とする**平均–分散基準**のもとでの最適化問題に帰着されることになる.

さて, 問題の**最適値関数**を, つぎのように定義する.

$$V_t[s_t] = \sup_{\pi \in \Pi_{\mathrm{M}}} V_t^{\pi}[s_t], \quad s_t \in S;\ t = 1, \ldots, T, T+1. \tag{15}$$

このとき, **最適性原理** (ベルマン原理, 動的計画原理) により, **最適性方程式** (ベルマン方程式, 動的計画方程式) は

$$V_{T+1}(s_{T+1}) = g_{T+1}(s_{T+1}), \quad s_{T+1} \in S; \tag{16}$$

$$\begin{aligned} V_t(s_t) &= \sup_{q_t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[V_{t+1}\left(s_{t+1}\right) \middle| s_t \right] \\ &= \sup_{q_t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[V_{t+1}\left(h_t\left(s_t, q_t, (v_t, \varepsilon_t)\right)\right) \middle| s_t \right], \quad s_t \in S;\ t = 1, \ldots, T \end{aligned} \tag{17}$$

と表される. これにより, $V_1(s_1)$ を達成する**最適な動的取引執行戦略** $\pi^* = (f_1^*, \ldots, f_t^*, \ldots, f_T^*) \in \Pi_{\mathrm{M}}$ は, 原理的には, 時点 T から始めて, 時点 t についてバックワードに, 上記の最適性方程式を満たす最適値関数 $V_t(s_t)$, $s_t \in S$, そしてそれと同時に, 各状態 s_t $(\in S)$ ごとに, 式 (17) の右辺を最適化する q_t^* (を定める意思決定規則 $q_t^* = f_t^*(s_t)$) を求めて行けば良い (バックワード・インダクション, 後退帰納法) .

2.2 最適取引執行戦略の性質

定理 2.1　時点 t $(= 1, \ldots, T)$ におけるラージ・トレーダーの最適執行量 q_t^* は, その時点における, ラージ・トレーダーの残余執行量 $\overline{Q}_t$, 過去の価格インパクトの残存効果 r_t の**線形関数 (アフィン関数)** となる. すなわち, 問題を規定する諸パラメータに依存する時間 t の確定的関数 a_t, b_t, c_t, $t = 1, \ldots, T$ を用いて,

$$q_t^* = a_t + b_t \overline{Q}_t + c_t r_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{18}$$

と表される. ((a_t, b_t, c_t), $t = 1, \ldots, T$ の満たす再帰式については, 紙面の都合上, 省略する.)

上記の定理から, 各時点 t $(= 1, \ldots, T)$ での最適執行量は, その時点における, 手持ち資金 w_t, 市場価格 p_t には依存せず, 残余執行量 $\overline{Q}_t$, 過去の価格インパクトの残存効果 r_t を通じてのみ, 決定過程の状態に依存する.

もし, ラージ・トレーダー以外のトレーダー達の価格インパクトが無い, あるいは, 彼らの総提出注文量が確定的ならば, これら $\overline{Q}_t$, r_t は予見でき, 確定的なコントロールが可能であるから, 最適な動的取引執行戦略は, 確定的な**静的取引執行戦略**のクラスの中にあることが分かる.

系 2.1　もしラージ・トレーダー以外のトレーダー達の価格インパクトが無い, すなわち, $\kappa_t = 0$, $t = 1, \ldots, T$, あるいは, 彼らの総提出注文量が確定的, すなわち, $\sigma_{v_t} = 0$, $t = 1, \ldots, T$ ならば, 時点 t $(= 1, \ldots, T)$ におけるラージ・トレーダーの最適執行量 q_t^* は, **時間 t の確定的関数**となる.

注 2.3　最終時点 $T+1$ における執行残を 0 とすることを強く課す, すなわち, $\overline{Q}_{T+1} = 0$ を堅い制約とする場合を考えたが, $\overline{Q}_{T+1} \neq 0$ の場合においても, 終値 p_{T+1} に加えて付加的な費用を支払って,

$$\left(p_{T+1} + \chi_{T+1} \overline{Q}_{T+1}\right) \overline{Q}_{T+1} \tag{19}$$

で購入・売却が可能であるとした “柔らかい制約” のもとでの最適取引執行問題においても, 上記の定理, 系は成立する, ただし, χ_{T+1} はある定数である. この場合, 最終時点での (効用) ペイオフを

$$g_{T+1}[s_{T+1}] := -\exp\{-R[w_{T+1} - (p_{T+1} + \chi_{T+1} \overline{Q}_{T+1}) \overline{Q}_{T+1}]\}$$

と定義すれば良い.

謝辞: 筆者の大西, 下清水は, それぞれ, 学術振興会科学研究費補助金 17K01255, 19J10501 による財政的支援を受けた.

参考文献

[1] Almgren, R. and Chriss, N.: "Optimal execution of portfolio transactions," *Journal of Risk*, **3**, pp. 5–39, 2000.

[2] Bertsimas, D. and Lo, A. W.: "Optimal control of execution costs," *Journal of Financial Markets*, **1**, pp. 1–50, 1998.

[3] Cartea, A., Jaimungal, S., and Penalva, J.: *Algorithmic and High–Frequency Trading*, Cambridge University Press, 2015.

[4] Kunou, S. and Ohnishi, M.: "Optimal execution strategy with price impact," *Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS) Kokyuroku*, **1675**, pp. 234–247, 2010.

[5] Kuno, S. and Ohnishi, M.: "Optimal execution in illiquid market with the absence of price manipulation," *Journal of Mathematical Finance*, **5**, pp. 1–14, 2015.

[6] Kuno, S., Ohnishi, M., and Shimizu, P.: "Optimal execution with off-exchange trading," *Journal of Mathematical Finance*, **7**, pp. 54–64, 2017.

[7] Kuno, S., Ohnishi, M., and Shimoshimizu, M.: "Optimal execution strategies with generalized price impact models," *Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS) Kokyuroku*, **2078**, pp. 77–83, 2017.

[8] Luo, X. and Schied, A.: "Nash equilibrium for risk-averse investors in a market impact game with transient price impact," arXiv:1807.03813v1 [q-fin.TR] 10 Jul 2018.

[9] Ohnishi, M., and Shimoshimizu, M.: "Equilibrium execution strategy with generalized price impacts," *Quantitative Finance*, Published online: 18 May 2020.

[10] Olivier Guéant: *The Financial Mathematics of Market Liuidity.* CRC Press, 2016.

[11] Schied, A. and Zhang, T.: "A market impact game under transient price impact," *Mathematics of Operations Research*, **44**, pp. 102–121, 2019.

[12] 大西匡光, 下清水慎: "金融市場における価格インパクトを考慮した取引執行ゲーム," **オペレーションズ・リサーチ**, 2020 年, 5 月号, 271–278 頁.