

## 市場価格急変予兆の検出について：応用編

大阪大学 大学院経済学研究科

数理・データ科学教育研究センター 大屋幸輔

### 1 はじめに

大屋 (2020) (前月号) では、観測対象系列に起きる急激な変化を事前に検証する、あるいは出来る限り早期に検出する方法として、Phillips and Shi (2019) によって提案されたモデル、および統計的推測方法に関して述べたが、以下では実際の応用に際しての補足と、日経 225 先物、日経平均ボラティリティー・インデックス (日経平均 VI) への適用事例についてみていく。

関心のある価格系列を  $P_t$ 、また観測時点を  $t = 1, \dots, T$  とし、対数価格  $\log P_t$  が以下のモデルに従うと仮定する。

$$\log P_t = \begin{cases} kT^{-\gamma} + \log P_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{if } t \in N \equiv [1, T_c] \\ -L_t + \log P_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{if } t \in C \equiv (T_c, T] \end{cases} \quad (1)$$

(1) では、 $\log P_t$  が漸近的には無視できる程度の大きさのドリフトをもつランダム・ウォークに従っている区間を平常時の区間  $N$ 、平均的に  $E[-L_t]$  の大きさを  $\log P_t$  を下方にシフトさせる確率的な要因が現れる区間を区間  $C$  と表記している。ここでの主たる関心の対象は、当初は区間  $N$  でのモデルに従っていた観測対象系列が、はじめて区間  $C$  でのモデルに切り替わった時点の特定化にある。Phillips, Shi and Yu (2015a), Phillips, Shi and Yu (2015b) (以降, PSY(2015ab)) は、特定の観測時点が区間  $C$  に入ったのかどうかをリアルタイムで検証する方法として、recursive and moving window 法を提唱している。条件付き不均一分散を許容する誤差項  $\varepsilon_t$  に関する仮定のもとで、検定統計量の漸近分布は理論上は導出されているが、実際の検証では、Bootstrap 法による有限標本のもとでの検定統計量の分布から臨界値がもとめられることになる。

Recursive and rolling window 法では、時点  $T_1 \equiv [r_1 T]$  から時点  $T_2 \equiv [r_2 T]$  の区間  $[T_1, T_2]$  の観測データにもとづいて、帰無仮説下でのモデル (区間  $N$  でのモデル) が推定され、DF 統計量  $DF_{r_1}^{r_2}$  が算出される<sup>\*1</sup>。そして、DF 統計量を算出する区間の終点

---

<sup>\*1</sup> DF 統計量の定義は前月号における (8) 式で、 $0 < r_1 < r_2 < 1$ 、記号  $[\cdot]$  は整数部分を表している。また単位根検定での DF 統計量と ADF 統計量の関係と同様に、ここで DF 統計量のかわりに ADF 統計量をもちいることも可能である。

$T_{r_2} \equiv \lfloor r_2 T \rfloor$  を検定の対象とする検定を行い、帰無仮説が棄却されれば、時点  $T_{r_2}$  は区間  $C$  に、また棄却されなければ区間  $N$  にあると推測される。ただし、区間の始点  $T_{r_1}$  の選定には注意が必要となる。例えば始点  $T_{r_1}$  以降、すなわちモデルを推定する区間内で、区間  $N$  から区間  $C$  への切り替わりがあり、その後、区間  $N$  にもどっている状況では、検定の検出力が低くなってしまう可能性がある。そのことを考慮して提案されたものが以下の Backward sup DF 統計量である。検定の対象となる特定の時点は  $T_r \equiv \lfloor rT \rfloor$  であり、推論にもちいる区間は  $[T_{r_1}, T_r]$ 、 $r_0$  はモデルの推定に必要な最小のサンプルサイズを与える比率である\*2。

$$BSDF_r(r_0) = \sup_{r_1 \in [0, r-r_0], r_2=r} DF_{r_1}^{r_2} \quad (2)$$

誤差項の分散不均一性と検定の繰り返し適用により過大となる検定のサイズ（多重性の問題）を考慮して、検定を行う際に必要となる臨界値を Bootstrap 法によってもとめる方法を Phillips and Shi (2019) が提案している\*3。

## 2 適用例

Backward sup DF 統計量を利用することで、検証の対象となる時点  $T_r = \lfloor rT \rfloor$  で、観測している（対数）価格系列に関するモデルが、(1)における区間  $C$  に入っているかどうかを判断することができる。そしてその判断を時点ごとに行うことにより、区間  $C$  の始点と終点を与える比率の推定値として以下の  $\hat{r}_e$  と  $\hat{r}_f$  が得られる\*4。

$$\hat{r}_e = \inf_{r \in [r_0, 1]} \{ r : BSDF_r(r_0) > cv_r(\beta_T) \} \quad (3)$$

$$\hat{r}_f = \inf_{r \in [\hat{r}_e, 1]} \{ r : BSDF_r(r_0) < cv_r(\beta_T) \} \quad (4)$$

このようにして推定された比率  $\hat{r}_e$  から定められる時点  $T_{\hat{r}_e} = \lfloor \hat{r}_e T \rfloor$  が、市場の急変の予兆となりうるのかどうかについて、日経225先物、日経平均VIへの適用例を以下でみていく\*5。

\*2  $r_0$  の実用的な設定として、PSY(2015a)が  $r_0 = 0.01 + 1.8/\sqrt{T}$  を推奨している。

\*3 Phillips and Shi (2020) では、統計ソフト R のパッケージとして公開されている `psymonitor` (Phillips, Shi and Caspi (2018)) を使って行われた応用例が紹介されている。

\*4  $cv_r(\beta_T)$  は  $BSDF_r(r_0)$  統計量の  $100(1 - \beta_T)\%$  点に対応する臨界値である。

\*5 (1)の区間  $C$  では、区間  $N$  では存在しなかった下方シフトの要因がモデルに現れるが、日経平均VIへの適用に際しては、下方ではなく上方へのシフト要因が現れるモデルを考えることになる。しかし推定対象となる帰無仮説のもとでのモデル、検定統計量は下方シフトのもとで導かれているものと同じである。

図1a: 日経225先物 (2016年6月24日)



Notes: 影付きのエリアはBSADF統計量が95%の臨界値を超えている期間

図1b: Backward sup ADF (2016年6月24日)



Notes: 破線はブートストラップ法によってもとめられた95%臨界値

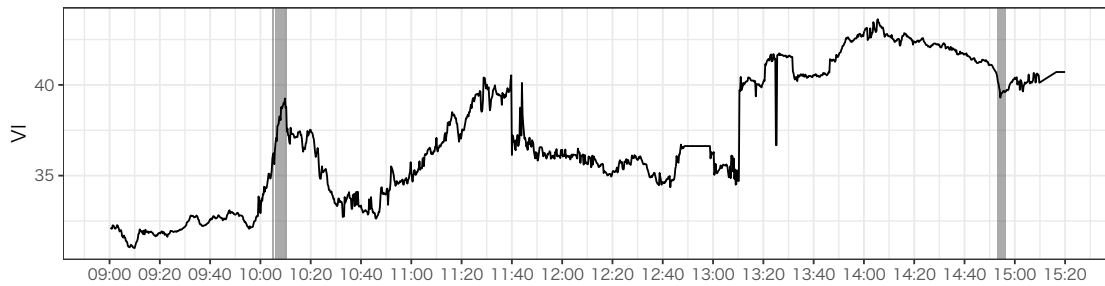
図1aは、2016年6月24日の日経225先物9月物の約定価格の推移である。 $\hat{r}_e$ と $\hat{r}_f$ の推定には、15秒間隔の約定価格系列を利用した\*<sup>6</sup>。制限値幅を超えた価格の変化が生じたこの日はEU離脱に関する英国の国民投票のニュースの影響により、前場において度々の大きな価格急落が観測されている。サーキットブレーカーは12時48分頃に発動されているが、それはあらかじめ定められた値幅の下限に達するなど基準を満たした時点であり、その時点において、急激な下落が起こったということを必ずしも表しているわけではない\*<sup>7</sup>。図1aの影付きのエリアが区間Cと判定された区間である。 $\hat{r}_e$ に注目すれば、時点 $T_{\hat{r}_e}$ までは、区間Nで、時点 $T_{\hat{r}_e}$ になった時点で区間Cに切り替わった様子が図1bで示されているBackward sup ADF統計量の推移からもみてとれる\*<sup>8</sup>。前場で二度起きている急落をとらえているが、どの時点をその下落の初期時点とするかによって、下落の予兆をとらえることができているかどうかは意見の分かれるところである。下落の初期時点で即座に、それが急落の始まりであると判断することは難しいが、下落がある程度継続するとそれを急落と判断する、という観点からは比較的早い段階で判断ができてい

\*<sup>6</sup> 観測時点で約定がない場合は当該時点以前の直近の約定価格で補完する previous tick 法を使っている。

\*<sup>7</sup> ここで注目する事象は、突然の下方や上方へのシフトを予見できるのかどうかであり、サーキットブレーカーが発動されるかどうかではない。

\*<sup>8</sup> ここでは、統計的推論のベースとなる統計量がDF統計量ではなく、ADF統計量を用いているので、Backward sup ADF統計量としている。

図2a: 日経平均VI (2016年6月24日)



Notes: 影付きのエリアはBSADF統計量が95%の臨界値を超えている期間

図2b: Backward sup ADF (2016年6月24日)



Notes: 破線はブートストラップ法によってもとめられた95%臨界値

と言えるであろう。

続く図 2a と図 2b は日経平均 VI に関するものである。前場で起きた日経 225 先物の二度の大きな急落のうち、10 時台の急落に対応すると考えられるものについては日経平均 VI においても同時刻近辺での急上昇としてとらえられている。一方、11 時 40 分頃の日経 225 先物の急落の時点に関しては、日経平均 VI は上昇しているものの、そのスピードは緩やかなもので、区間 C と判断されるような急上昇ではなかった。

表 1 は、日経 225 先物と日経平均 VI に関して推定された  $\hat{r}_e$  と  $\hat{r}_f$  をまとめたものである。2016 年 6 月 24 日における推定結果に限定されるが、日経平均 VI の方における急変が日経 225 先物の急変に先行していることが示唆される。ただし、この結果に関しては、限定された日だけでなく、他の多くの日での検証や、Hayashi and Koike (2018) で提案されている先行遅行関係の検証方法などによるエビデンスの積み重ねが必要であろう。

表 1: 区間 C の始点と終点

	日経 225 先物		日経平均 VI	
	$\hat{r}_e$	$\hat{r}_f$	$\hat{r}_e$	$\hat{r}_f$
1	10:06:00	10:11:00	1	10:04:45 10:05:15
2	10:12:00	10:12:00	2	10:05:45 10:10:15
3	11:40:15	11:41:00	3	14:53:15 14:56:30
4	11:42:00	11:47:30		
5	15:02:30	15:03:00		

### 3 おわりに

本稿では前月号に引き続き、市場価格の急変の予兆をとらえる統計的な方法を概観するとともに、日経225先物、日経平均VIへの適用例から、その有用性をみてきた。一般的な変化点の検出問題では、検証対象系列には特定のモデルを仮定しないものが多い。分析対象を限定しないメリットはあるが、ファイナンスにおける価格系列に関しては、ベースのモデルとして、ランダム・ウォークを仮定するようなある程度の特定化は許容される。そのような最小限の仮定のもとで検出力の向上をはかる本稿でとりあげたアプローチは、計量経済学で大きな進展を遂げてきた単位根検定の枠組みに変化点問題をうまく取り入れている興味深いアプローチであると言える。

### 参考文献

- Hayashi, T. and Koike, Y. (2018), “Wavelet-based methods for high-frequency lead-lag analysis,” *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 9(4), 1208–1248.
- Phillips, P. C. B. and Shi, S. (2019), “Detecting financial collapse and ballooning sovereign risk,” *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 81(6), 1336–1361.
- Phillips, P. C. B. and Shi, S. (2020), “Real time monitoring of asset markets: Bubbles and crises,” in *Handbook of Statistics*, Vol. 42, 61–80, Elsevier.
- Phillips, P. C. B., Shi, S. and Caspi, I. (2018), “Real-Time monitoring of asset markets with R,” R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria (URL: <https://CRAN.R-project.org/package=psymonitor>).
- Phillips, P. C. B., Shi, S. and Yu, J. (2015a), “Testing for multiple bubbles: Historical episodes of exuberance and collapse in the S&P 500,” *International Economic Review*, 56, 1043–1078.
- Phillips, P. C. B., Shi, S. and Yu, J. (2015b), “Testing for multiple bubbles: Limit theory of real-time detectors,” *International Economic Review*, 56, 1079–1134.
- 大屋幸輔 (2020) 「市場価格急変予兆の検出について」, 『先物・オプションレポート』, 大阪取引所, Vol. 32, No. 10, 1-6.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。  
本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。  
本資料の内容は、株式会社大阪取引所の意見・見解を示すものではありません。  
本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。