

日米株式市場におけるボラティリティ予測のホライズン非対称性： ロバスト Log-HAR モデルによる実証分析*1

法政大学経営学部 高橋慎

1 はじめに

金融市場におけるボラティリティの精緻な予測は、デリバティブの価格評価やポートフォリオ最適化などにおいて重要な役割を果たす。オプション価格から逆算されるインプライド・ボラティリティ (IV) は、市場参加者の将来の不確実性に対する予測とリスクプレミアムを内包する情報変数として広く用いられている。

本稿の目的は、日米の主要株価指数（日経 225 および S&P 500）を対象に、日本のオプション指標である VXJ と米国の VIX が、将来の実現ボラティリティ (RV) の予測においてどの程度の追加的情報価値を持つかを実証的に比較・検証することである。さらに本稿では、予測ホライズン（1 日先および 1 ヶ月先）の違いが、オプション指標の予測力に与える影響の非対称性について検証を行う。

本稿の分析における特徴は、2020 年のコロナ・ショックというテールリスク顕在化局面を含むデータ（2018 年～2022 年）を用いている点にある。危機時におけるボラティリティの極端なスパイクに対する頑健性を担保するため、対数変換を用いた Log-HAR モデル (Corsi, 2009; Ubukata and Watanabe, 2014) に M 推定を導入した「RR-Log-HAR (ロバスト回帰)」(Clements and Preve, 2021) を採用する。さらに、対数モデルからの再変換に伴う Jensen の不等式のバイアスを調整するため、Bekaert and Hoerova (2014) に基づく分散補正を適用したアウトオブサンプル予測評価を行う。

実証分析の結果、1 日先 ($h = 1$) の短期予測においては、日米ともにオプション指標 (VIX/VXJ) の追加が RV の予測精度を統計的に有意に改善させることが確認された。とりわけ日本市場の VXJ は、市場の混乱期においても予測誤差を有意に低下させた。一方で、1 ヶ月先 ($h = 22$) の中期予測においては、オプション指標の追加は予測精度を有意に改善させず、平時においてはかえって予測誤差を統計的に有意に拡大させることが明らかとなった。

この予測ホライズンによる非対称性は、オプション価格に内包される分散リスクプレミアム (VRP) の性質によって説明される。Bekaert and Hoerova (2014) 等が指摘するように、IV は純粋な将来の変動予測に投資家の恐怖プレミアム (VRP) が上乘せされた構造を持つ。本稿の実証結果は、この VRP の変動が短期予測においては有用な情報として機能する一方で、中期予測においては物理測度に対する上方バイアス (ノイズ) として作用し、結果的に予測精度を悪化させるダイナミクスを日米データから客観的に提示するものである。

2 データと市場の概況

本分析では、2018 年 1 月 4 日から 2022 年 4 月 21 日までの日次データを使用する。目的変数となる日米の実現ボラティリティ (RV) には、Oxford-Man Institute が提供する 5 分間隔データから算出された RV を採用した*2。説明変数となるオプション指標には、米国市場は VIX、日本市場は大阪大学数理・データ科学教育

*1 この研究の一部は、科研費 23K01338、および法政大学イノベーション・マネジメント研究センター研究プロジェクト「大規模データをを用いた金融市場の分析」からの助成を受けた。

*2 同データベースの公開サイト (<https://realized.oxford-man.ox.ac.uk/>) は現在アクセス不可となっている。

研究センターが算出する Volatility Index Japan (VXJ)^{*3}を採用し、年率ボラティリティ (%) のスケールで統一している。

表1 変数の記述統計量・正規性検定・自己相関検定 (2018年1月4日 - 2022年4月21日)

	RV (米国 SPX)	VIX (米国)	RV (日本 N225)	VXJ (日本)
N	875	875	875	875
Mean	12.72	20.77	11.61	21.94
Median	9.80	18.73	9.91	20.66
Std. Dev.	10.55	8.99	7.26	8.25
Min	2.23	9.22	3.22	12.66
Max	102.30	82.69	98.49	82.17
Skewness	3.96	2.72	4.37	3.53
Kurtosis	25.72	14.29	36.51	20.56
JB Stat	21097.50	5721.25	43723.39	13057.69
JB (p-value)	< 0.001***	< 0.001***	< 0.001***	< 0.001***
LB Stat	4453.81	8978.97	3173.00	8138.39
LB (p-value)	< 0.001***	< 0.001***	< 0.001***	< 0.001***

RV は実現ボラティリティを示す。JB 検定の帰無仮説：系列は正規分布に従う。

LB 検定の帰無仮説：系列に自己相関は存在しない (ラグ 22)。

***, **, * はそれぞれ 1%, 5%, 10% 水準で有意。

表1の記述統計量から、日米ともにRVの平均値よりもIV (VIX/VXJ)の平均値が高く推移していることが確認できる。これはオプション価格に内包されるVRPの存在を反映している^{*4}。また、歪度 (Skewness) および尖度 (Kurtosis)、さらにJarque-Bera (JB) 検定の結果から、全系列において1%水準で正規性が棄却された。Ljung-Box (LB) 検定の結果においても強い自己相関が確認され、ボラティリティ・クラスタリングの存在が裏付けられている。

図1の時系列推移を見ると、2020年初頭のコロナ・ショック時においてRVおよびIVが年率80%を超える外れ値を記録している。このような非正規性と外れ値の存在は通常の最小二乗法 (OLS) による推定を不安定にさせるため、次節にてロバスト回帰 (RR-Log-HAR モデル) を採用する実証的根拠となる。

3 分析手法

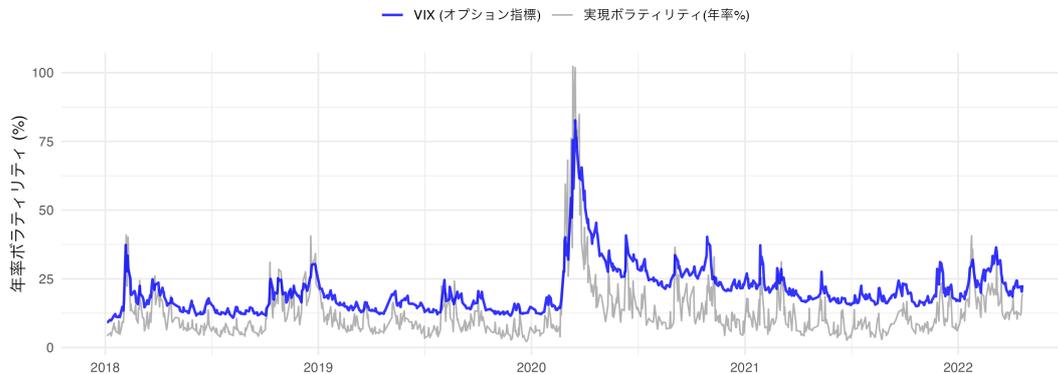
ボラティリティの長期記憶性を捉え、かつ予測値の正值性を保証するため、本稿では対数変換を行ったLog-HARモデルを採用する。 h 期先 ($h = 1, 22$)の平均実現ボラティリティの予測モデルは以下のように定式化される。

$$\log RV_{t,t+h} = \beta_0 + \beta_d \log RV_t + \beta_w \log RV_{t,w} + \beta_m \log RV_{t,m} + \gamma D_t^- + \delta \log IV_t + \epsilon_{t+h}$$

^{*3} <https://www-mmds.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/structure/activity/vxj.php>

^{*4} VRPはリスク中立測度下の期待分散と物理測度下の期待分散の差として定義される。

【米国市場 SPX】 ボラティリティの推移 (2018年1月 - 2022年4月)



【日本市場 N225】 ボラティリティの推移 (2018年1月 - 2022年4月)

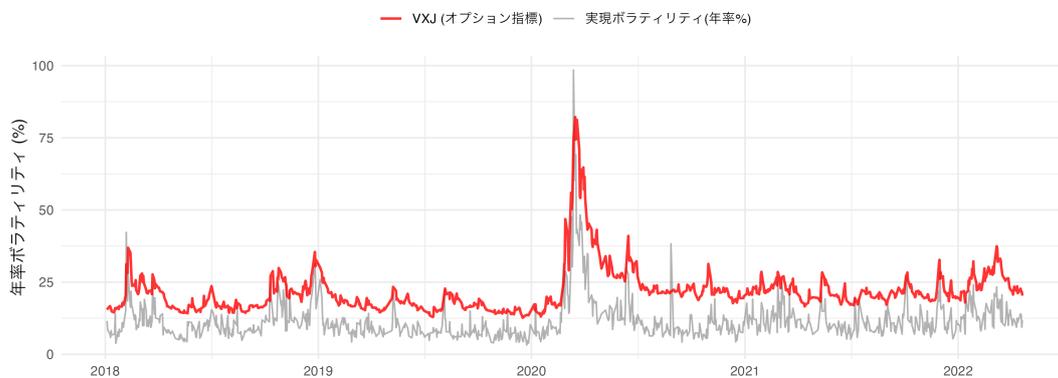


図1 日米市場におけるボラティリティの時系列推移 (2018年1月4日~2022年4月21日)

ここで、 $\log RV_{t,t+h}$ は期末までの h 日間の平均実現ボラティリティの対数である。 $RV_{t,w}$ および $RV_{t,m}$ は過去5日間および22日間の移動平均を表す。 D_t^- は当日のリターンが負であった場合に1をとるダミー変数であり、レバレッジ効果を捕捉する (Ubukata and Watanabe, 2014)。 IV_t は各市場のオプション指標 (VIX または VXJ) である。 $\delta = 0$ と制約したモデルを「Base モデル」とし、 IV_t を追加した拡張モデルと比較する。

前述の極端な外れ値に対処するため、Clements and Preve (2021) に準拠し、M 推定を用いて外れ値に対するウェイトを低下させるロバスト回帰 (RR-Log-HAR モデル) を用いてパラメータを推定する。また、対数モデルによる予測値を元の分散 (Level) スケールに戻す際の変換バイアスを調整するため、Bekaert and Hoerova (2014) に従い、残差分散 $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ を用いた以下のバイアス補正を適用した。

$$\widehat{RV}_{t,t+h} = \exp \left(\widehat{\log RV}_{t,t+h} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_\epsilon^2 \right)$$

アウトオブサンプル予測の評価指標には、観測ノイズに対して頑健な QLIKE Loss を用いる (Patton, 2011)。

$$QLIKE_t = \frac{RV_{t,t+h}}{\widehat{RV}_{t,t+h}} - \log \left(\frac{RV_{t,t+h}}{\widehat{RV}_{t,t+h}} \right) - 1$$

予測誤差の差異の統計的有意性は Diebold-Mariano (DM) 検定 (Diebold and Mariano, 1995) を用いて検証する。中期予測 ($h = 22$) においては、オーバーラップに伴う自己相関を調整するためラグ数 21 の Newey-West

HAC 標準誤差を用いている。

4 実証結果

4.1 インサンプル推定結果 (2018-2022)

表2 インサンプル推定結果: 1日先および1ヶ月先予測 ($h = 1, 22$)

	Dependent variable: $\log RV_{t,t+1}$ ($h = 1$)				Dependent variable: $\log RV_{t,t+22}$ ($h = 22$)			
	SPX Base (1)	SPX+VIX (2)	N225 Base (3)	N225+VXJ (4)	SPX Base (5)	SPX+VIX (6)	N225 Base (7)	N225+VXJ (8)
$\log RV_t$	0.488*** (0.043)	0.429*** (0.044)	0.295*** (0.042)	0.238*** (0.042)	0.205*** (0.044)	0.131*** (0.042)	0.162*** (0.032)	0.121*** (0.032)
$\log RV_{t,w}$	0.293*** (0.057)	0.208*** (0.058)	0.449*** (0.059)	0.283*** (0.063)	0.126** (0.057)	0.014 (0.056)	0.131*** (0.045)	-0.004 (0.048)
$\log RV_{t,m}$	0.130*** (0.042)	0.050 (0.045)	0.115** (0.048)	-0.059 (0.054)	0.233*** (0.043)	0.121*** (0.043)	0.217*** (0.037)	0.069* (0.042)
D_t^-	0.214*** (0.051)	0.218*** (0.050)	0.146*** (0.044)	0.119*** (0.042)	0.052 (0.051)	0.056 (0.048)	0.026 (0.033)	0.004 (0.033)
$\log IV_t$		0.362*** (0.068)		0.538*** (0.082)		0.486*** (0.065)		0.455*** (0.063)
β_0	-1.089*** (0.240)	-0.120 (0.300)	-1.600*** (0.311)	-0.864*** (0.321)	-4.283*** (0.243)	-2.950*** (0.288)	-4.841*** (0.235)	-4.120*** (0.248)
Pseudo R^2	0.686	0.699	0.535	0.560	0.339	0.362	0.311	0.349
Observations	832	832	832	832	832	832	832	832

Note: * $p < 0.1$; ** $p < 0.05$; *** $p < 0.01$

M 推定を用いた RR-Log-HAR モデルによる推定。 $\log IV_t$ は米国市場で VIX、日本市場で VXJ を指す。

表2は全期間のインサンプル推定結果 ($h = 1, 22$) を示す。過去の RV の寄与を制御した後でも、追加された $\log IV_t$ (VIX および VXJ) の係数はすべてのモデルで 1% 水準で有意な正の値を示した。また、Base モデルと比較して拡張モデルにおける Pseudo R^2 の向上が確認できる。特に日本市場において VXJ による説明力の上昇幅が大きい。さらに 1ヶ月先予測 ($h = 22$) では、オプション指標を追加すると過去 5 日間のボラティリティ成分 ($\log RV_{t,w}$) の有意性が失われる一方、 $\log IV_t$ の係数は高い有意性を保持している。これは、VXJ が現物市場の過去の変動に依存しない将来の変動予測情報を含んでいることを示唆している。

4.2 アウトオブサンプル予測の評価：短期予測 ($h = 1$)

予測モデルにエキスパンディング・ウィンドウ方式を採用し、2019 年から 2022 年 4 月までの期間でアウトオブサンプルの逐次予測評価 ($h = 1$) を行った。表3に平均 QLIKE Loss と DM 検定の結果を示す。DM 検定の t 値が正で有意な場合、拡張モデルの予測誤差が Base モデルに対して有意に小さいことを意味する。

表3より、全期間 (Overall) において日米ともにオプション指標を含めたモデルが Base モデルの QLIKE Loss を下回り、DM 検定も 5% 水準で有意となった。年別のサブサンプル分析では、コロナ・ショックが生じ

表3 アウトオブサンプル予測評価: 1日先予測 ($h = 1$)

期間	米国市場 (SPX)			日本市場 (N225)		
	Base	+VIX	DM stat	Base	+VXJ	DM stat
Overall	0.256	0.236	2.020**	0.237	0.211	2.220**
2019	0.219	0.204	1.026	0.177	0.171	0.781
2020	0.326	0.293	1.179	0.347	0.280	1.769*
2021	0.268	0.252	1.843*	0.210	0.198	1.999**
2022	0.117	0.110	1.005	0.166	0.157	0.807

Note: * $p < 0.1$; ** $p < 0.05$; *** $p < 0.01$

DM stat が正で有意な場合、拡張モデルが Base モデルを統計的に上回る。

た 2020 年において、日本市場では VXJ の追加が 10% 水準で有意 ($t=1.769$) に予測精度を改善させた。翌 2021 年も 5% 水準で有意 ($t=1.999$) である。対照的に米国市場の VIX は、2020 年において有意な予測精度の向上をもたらしていない。

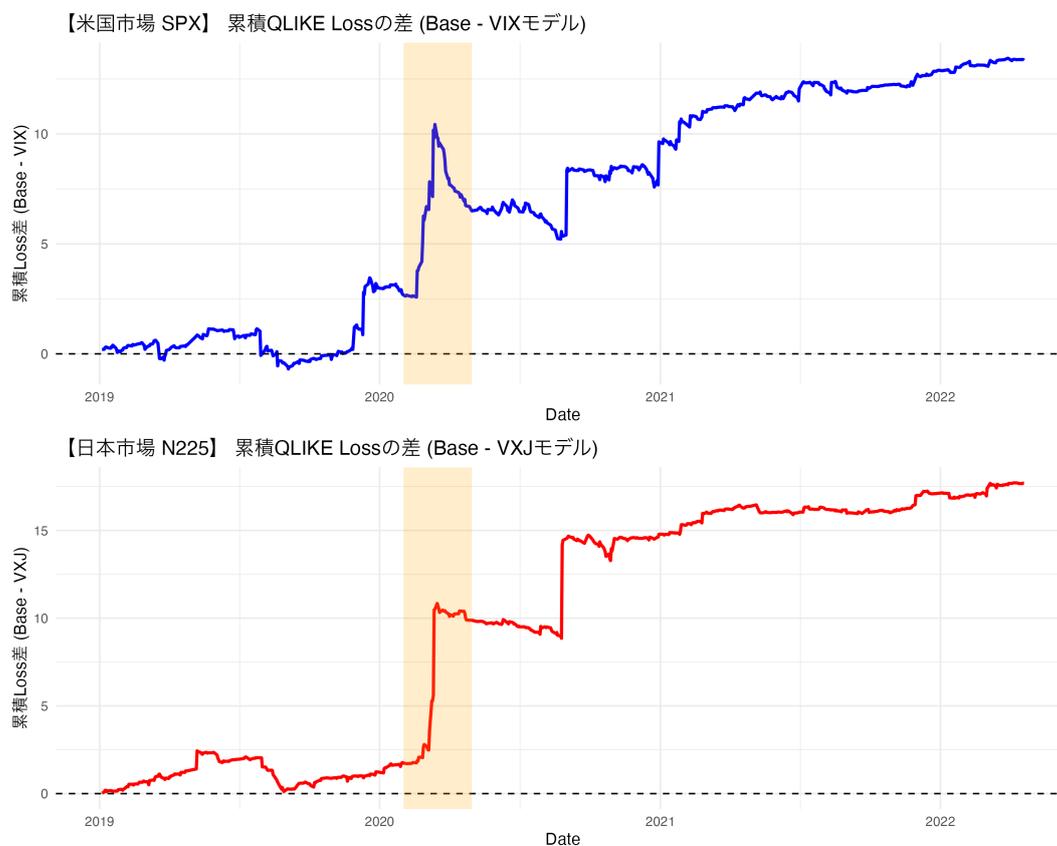


図2 累積 QLIKE Loss の差 (Base モデル - 拡張モデル, $h = 1$)

図2は、累積 QLIKE Loss の差 (Base モデル - 拡張モデル) の推移である。線が右上がりの期間は拡張モデルのアウトパフォーマンスを示す。2020年の市場混乱期 (オレンジ色のアミカケ部分) において、日米ともに線が急激な右上がりに転じている。その後、ショックのピークを通過した直後には一時的に線が右下がりへと転じる (Base モデルが優位となる) 局面が見られるものの、2020年8月から9月頃を境に日米ともに再び右上がりの推移へと回帰している。これは、オプション指標が危機の発生時のみならず、その後のボラティリティが高止まりするプロセスにおいても予測精度の改善に寄与していることを示している (なお、予測値の推移プロットは紙面の都合上割愛するが、RR-Log-HAR モデルと分散補正により、外れ値に対しても過度なオーバーシュートを生じない安定的な予測が確認された)。

4.3 アウトオブサンプル予測の評価：中期予測 ($h = 22$)

表4は、1ヶ月先予測 ($h = 22$) におけるアウトオブサンプル評価結果である。

表4 アウトオブサンプル予測評価: 1ヶ月先予測 ($h = 22$)

期間	米国市場 (SPX)			日本市場 (N225)		
	Base	+VIX	DM stat	Base	+VXJ	DM stat
Overall	0.792	0.772	0.586	0.400	0.380	0.986
2019	0.212	0.212	-0.042	0.079	0.083	-1.468
2020	2.146	2.057	0.888	1.127	1.054	1.218
2021	0.157	0.171	-1.113	0.069	0.072	-0.549
2022	0.179	0.238	-3.274***	0.069	0.080	-1.217

Note: * $p < 0.1$; ** $p < 0.05$; *** $p < 0.01$

t 値が負で有意な場合、Base モデルの予測精度が有意に優れている。

表4の結果は、1日先予測とは対照的である。全評価期間 (Overall) において、DM 検定における統計的な有意性は日米ともに確認されなかった。年別のサブサンプルを見ると、市場の混乱が収束した2021年および2022年においては、DM 統計量がマイナスに転じている。特に2022年の米国市場においては、VIX を追加したことによる予測精度の悪化が1%水準で有意 ($t = -3.274$) となった。

図3の累積 QLIKE Loss の差を見ると、コロナ・ショックの混乱期においては両市場とも拡張モデルの予測精度が上回っているが、ショック通過後の平時局面に移行すると線は水平、あるいは右下がりへと転じている。特に米国市場の2022年以降の局面における右下がりの軌道は、オプション指標が中期予測においてノイズとなり予測誤差を拡大させていることを明示している。

この予測ホライズンによる非対称な結果は、オプション価格に含まれるVRPの影響として解釈できる。危機発生時に急拡大したVRPは、短期予測においては市場のセンチメント指標として機能するが、中期予測においては物理測度に対する上方バイアス (ノイズ) として作用し、事後的なRVに対する過大な予測 (オーバーシュート) を引き起こす (詳細な推移プロットは割愛)。結果として、ボラティリティの急増局面以降の中期予測においては、オプション指標を含まないBaseモデルの方が統計的に堅牢な予測精度を有することが実証された。

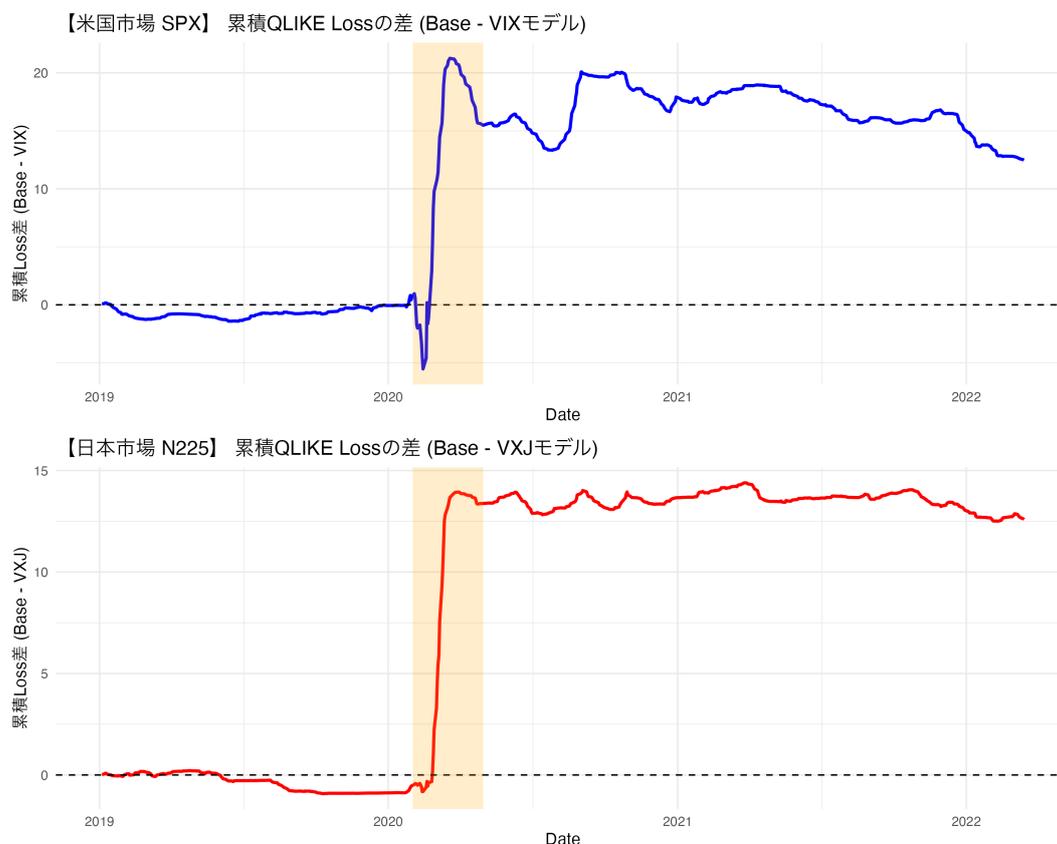


図3 累積 QLIKE Loss の差 (Base モデル - 拡張モデル, $h = 22$)

5 結論

本稿では、日米の株式市場を対象に、インプライド・ボラティリティ指標 (VXJ および VIX) が実現ボラティリティ予測に与える情報価値について、予測ホライズン (短期・中期) の観点から実証的に検証した。ボラティリティの極端なスパイクに対して頑健な RR-Log-HAR モデルと分散バイアス補正を用いて、2018 年から 2022 年の期間におけるアウトオブサンプル予測評価を行った。

分析の結果、1 日先 ($h = 1$) の短期予測においては、オプション指標の追加が予測精度を有意に改善させることが確認された。とりわけ日本市場においては、極端な市場ストレス下においても VXJ が予測精度を向上させており、VIX 以上に統計的に有意な予測情報を含んでいることが示された。一方で、1 ヶ月先 ($h = 22$) の中期予測においては、オプション指標の追加は予測精度を有意に改善させず、平時においてはむしろ予測誤差を統計的に有意に拡大 (悪化) させることが明らかとなった。この非対称性は、純粋な将来の変動予測に上乘せられた VRP が、中期的な予測においては上方バイアス (ノイズ) として機能するためであると考えられる。

本稿の実証結果から、ボラティリティ予測モデルを構築する際には、予測ホライズンに応じてオプション情報への依存度を適切に調整する必要性が示唆される。今後の課題としては、本稿の中期予測において予測誤差の拡大要因となった VRP を明示的にモデル化し、予測値から動的に分離する手法の検討が挙げられる。具体的には、Realized GARCH モデル (Hansen et al., 2012; Hansen and Huang, 2016) や、Realized SV モデ

ル (高橋ほか, 2020; Takahashi et al., 2023) のフレームワークにオプション情報を外生変数あるいは潜在変数として組み込み、既存の予測モデルとの比較・検証を通じて、現物市場とオプション市場の情報伝達メカニズムをより詳細に解明していくことが期待される。

参考文献

- Bekaert, G. and Hoerova, M. (2014), 'The VIX, the variance premium and stock market volatility', *Journal of Econometrics* **183**(2), 181–192.
- Clements, A. and Preve, D. P. (2021), 'A practical guide to harnessing the har volatility model', *Journal of Banking & Finance* **133**, 106285.
- Corsi, F. (2009), 'A simple approximate long memory model of realized volatility', *Journal of Financial Econometrics* **7**(2), 174–196.
- Diebold, F. X. and Mariano, R. S. (1995), 'Comparing predictive accuracy', *Journal of Business & Economic Statistics* **13**(3), 134–144.
- Hansen, P. R. and Huang, Z. (2016), 'Exponential GARCH modeling with realized measures of volatility', *Journal of Business & Economic Statistics* **34**(2), 269–287.
- Hansen, P. R., Huang, Z. and Shek, H. (2012), 'Realized GARCH: A joint model of returns and realized measures of volatility', *Journal of Applied Econometrics* **27**(6), 877–906.
- Patton, A. J. (2011), 'Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies', *Journal of Econometrics* **160**(1), 246–256.
- Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2023), *Stochastic Volatility and Realized Stochastic Volatility Models*, SpringerBriefs in Statistics, JSS Research Series in Statistics, Springer Singapore.
- Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014), 'Pricing Nikkei 225 options using realized volatility', *The Japanese Economic Review* **65**(4), 431–467.
- 高橋慎, 大森裕浩 and 渡部敏明 (2020), 「Realized stochastic volatility モデル：拡張と日本の株価指数への応用」, 『統計数理』 **68**(1), 65–85.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社日本取引所グループおよびグループ各社 (株式会社東京証券取引所、株式会社大阪取引所、株式会社東京商品取引所、株式会社 JPX 総研、日本取引所自主規制法人および日本証券クリアリング機構) の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

筆者、株式会社日本取引所グループおよび上記グループ各社は、本資料に基づく投資あるいは類似の行為により発生した如何なる損失や損害に対して、一切の責任を負うものではありません。