連続時間モデルに基づく業績連動株式報酬制度の価値評価 I

大西 匡光[1]

1. はじめに

本稿（2026 年 6 月号，7 月号）の目的は，連続時間モデルに基づく業績連動株式報酬制度の価値評価モデルを提案することである．近年，欧米諸国には遅れをとりながらも，我が国でも様々な産業，とりわけ成長産業でストック・オプション，リストリクテッド・ストック（譲渡制限付き株式），パーフォーマンス・シェア，等々の株式報酬制度への関心は高まりつつある．しかしながら，売上げや利益などの業績に連動させた株式報酬制度を評価する標準的な方法は無く，各企業が独自の判断で価値評価しており，公正とは言えない状況にある．そこで，業績連動の無い通常のストック・オプションの場合に限定すれば，実務上に慣習的に適用されるブラック＝ショールズ・モデルに業績連動を組み込む形で，業績連動株式報酬制度の価値評価のための連続時間の確率モデルの枠組みを提案・紹介する．

株式報酬制度とは，企業が役員／従業員に対して，株式そのものや株価を参照して額が定まる現金によって報酬を授与する制度で，業績や株価に条件を付けたり，連動させたりして，支給する株式報酬が決定されるインセンティブ報酬制度の一群である．企業の業績や株価が授与する報酬と直接結びつくため，役員／従業員へのインセンティブ，すなわち経営努力／労働意欲による成果に対する動機付けを引き出し，株主企業価値の向上への意識を高めることに繋がることが期待される．

様々な株式報酬制度の中から，代表的なものを挙げれば，下記の通りである．

- ストック・オプション[2]

予め定めた価格（＝権利行使価格）で自社株を買うことができる権利のことで，役員や従業員に対する報酬のひとつとして，とくに米国などで広まっている．我が国でも 1997 年 5 月の商法改正により，ストック・オプション制度の導入が可能になった．それ以来，次第に関心が高まって来ており，導入企業の数はその２０年後の 2017 年時点では 600 社ほどに上っていることが報告されている（ウイリス・タワーズワトソン，三菱 UFJ 信託銀行 [1]）．ストック・オプション制度には，損失を被るリスクを負わずに株式を取得する権利を得られるという取得者にとってのメリットがある．また，企業の業績が向上して，株価が上がるとストック・オプションを付与された者の利益が増すようになっているため，企業の業績を伸ばす動機付けになる．

- リストリクテッド・ストック（Restricted Stock [RS]，譲渡制限付き株式）

リストリクテッド・ストックとは，株式報酬の一つで，役員／従業員の一定期間の継続勤務などを条件とし，その条件を達成するまでは譲渡（売却）が制限される株式のことである．企業側は従業員や役員に報酬として自社株式を事前に割り当てるが，条件達成（一定期間の継続勤務，業績の改善，等）の後でなければ株式の譲渡ができないため，中長期の業績向上への意欲を高めたり，優秀な人材の流出を食い止めたりする効果がある．

- リストリクテッド・ストック・ユニット（Restricted Stock Unit [RSU]）

リストリクテッド・ストック・ユニットとは，株式報酬の一つで，役員／従業員の一定期間の継続勤務などを条件とし，その条件を達成した後に株式を受け取る権利を付与される制度のことである．事前に自社株式が割り当てられる RS と異なり，役員／従業員は“ユニット”と呼ばれるポイントが規定に従って付与され，条件達成後にポイント数に応じた株式や現金に変換され，授与される．

---

[1] 大和大学 情報学部 情報学科，大阪大学 数理・データ科学教育研究センター［招へい教授］，大阪大学 名誉教授

[2] 金融市場で売買される株式オプション（Stock Option）とは異なり，このように邦文（カタカナ）表記される慣習になっている．

- パーフォーマンス・シェア (Performance Share [PS])［パーフォーマンス・ストック (Performance Stock)とも言う］

パーフォーマンス・シェアとは，株式報酬の一つで，役員／従業員が，一定期間の継続勤務状況，株価の変動状況，既定の業績目標達成状況に応じて決定される単位の，自社株式を付与される制度のことである．

- パーフォーマンス・シェア・ユニット（Performance Share Unit [PSU]）

パーフォーマンス・シェアとは，PS と似た株式報酬制度で，役員／従業員が，一定期間の継続勤務状況，株価の変動状況，既定の業績目標達成状況に応じて決定される株式報酬制度のことであるが，PS とは違って，主に株式ではなく“ユニット”の形で報酬が提供される点が異なる．これらのユニットは，既定で特定の業績目標が達成された場合に，株式や現金に変換され，授与される．

このように多様な種類の株式報酬制度が実施されているが，最近の企業の事例を見ると，売上げ（高）や利益などの業績に条件を付したり，連動させたりする，いわゆる業績連動型株式報酬制度を実施している割合が多くなって来ている．ここでいう業績条件とは，例えば，ある年度の営業利益が所定の額以上のとき，権利行使が可能になるといった類いのものである．株式報酬制度は，役員／従業員に付与されるため，このような業績条件を付すことで，役員の経営努力や従業員の労働意欲を，より直接的に向上させるインセンティブに繋がるという効果が期待できる．実際に，業績連動の株式報酬制度の実施によって業績の向上（つまり，売上げや利益の上昇）に繋がっている企業の事例が多いことからも，業績連動の株式報酬制度に対するさらなる関心の高まりが予想される．

ここで会計処理・税務上問題となるのが，それら株式報酬制度の公正価値の評価である．例えば，ストック・オプションを例に挙げれば，その発行価格（いわゆる払込価額）の評価の問題がある．ストック・オプションは，あらかじめ決められた価格で株式を購入できる権利であるため，発行価格によっては，ストック・オプション所有者が特に有利な金額で株式を購入できる場合があり，既存の株主の利益を害する可能性がある．そのため，発行価格を如何に設定するかが重要な問題となる．

オプションの評価モデルとしては，金融工学／数理・計量ファイナンスでの標準的なモデルとして，ブラック＝ショールズ・モデルがある（例えば，Cvitanić and Zapatero [17], Hull [20]）．これは，ヨーロピアン・オプション（権利行使期間の最終日［満期］にのみ，権利行使可能なオプション）を，リスク中立確率測度のもとで，株価，行使価格，無リスク利子率，分散（ボラティリティ），期間，という 5 つのパラメータを用いて評価する，単純で明確なモデルである．このブラック＝ショールズ・モデルは，使いやすく，公正さや認知度からみても非常に有用なため，実務でも広く慣習的に使われている．

しかしながら，業績条件付きストック・オプションは，通常のストック・オプションと比較して権利行使可能性に制限がかかり，そのためオプション価値にも影響を与えるものと考えられる．また，ブラック＝ショールズ公式を適用したとしても，業績条件については多くの仮定や前提を必要とするため，評価者によって評価額に幅が出てしまう．したがって，業績条件付きストック・オプションの評価にブラック＝ショールズ公式を適用するのは，会計的にも不適切であるとも言える．それにもかかわらず，業績条件付きストック・オプションを発行している企業がその価値評価の方法として採用しているのは，ブラック＝ショールズ公式である．それは業績条件付きストック・オプションの一般的で標準的な評価モデルが存在しないことに起因する．ここに，ブラック＝ショールズ・モデルとは異なる，新しい業績条件付きストック・オプションの価値評価方法が求められている．

このような業績条件付きストック・オプションの価値評価についての研究は，著者らの知る限り，中村［9]，［10]，[11］ 以外にほとんど見当たらない（一方，Fujimoto (藤本) [18]，［19］は，非完備市場における条件付き請求権に対する限界効用基準のもとでの価格付けによるアプローチを取る理論研究を発表している）．[9］では，著者の中村慎二氏は，業績条件付きストック・オプションの価値評価に伴う困難について，以下のように言及している．

> 業績条件付きストック・オプションの価値評価を行うためには，将来の業績の分布または，業績達成確率を仮定しなければならない．しかし，業績の分布をモデル化するにあたっては，以下のような困難を伴う．
>
> (1) 利益のデータが連続的なものではないこと

(2) 利益のデータはマイナス値を取り得ること

(3) 利益と株価の相関をモデル化することが困難であること

以上の理由から，中村慎二氏は，[9] において，主として，株価と業績とが無相関であることを前提とした新しい評価モデルを提案し，業績条件付きストック・オプションの価値の解析・評価を試みている．

しかしながら，株価と利益が無相関であるならば，業績の向上が株価の上昇に繋がらず，業績条件の達成を従業員等の株式取得のインセンティブに繋げる強い要因にはならない．したがって，従業員等に業績向上のインセンティブを与えるという，業績条件付きストック・オプションの発行目的に適さず，業績条件付きストック・オプションを発行する趣旨にそぐわない．そこで我々は，株価と業績には相関があるものとして，中村慎二氏が挙げる上記の (1)～(3) の困難を克服するようなモデル構築を試みている[3]，[4]，[8]，[12]，[13]，[24]．一方，中村慎二氏は [9] の全面的改訂版とも言える [11] の第 3 編において，業績条件付きストック・オプションの評価の困難さと課題について，様々な観点から，より詳細に検討を行っている．

本稿の目的は，それら業績条件付きストック・オプションの価値評価のために行った試みを，下記の 3 点で拡張・一般化することにある：

(i) 業績モデルの基礎となる業績密度［率］過程を，ドリフト付きブラウン運動（本 2026 年 6 月号）に加えて，オルンシュタイン＝ウーレンベック過程（次 2026 年 7 月号）をも扱えるようにすること；

(ii) 業績条件が満たされた場合にのみ株式報酬が支払われる断崖（cliff）型の業績連動の形態をより一般化すること；

(iii) 支払われる報酬（ペイオフ）を，プレーンなコール・オプション型に限定せず，より一般化すること．

本稿は以下のように構成される．まず，第 2 節で株価と業績（ドリフト付きブラウン運動で表現）の同時（結合）確率モデルを導入し，第 3 節において業績連動型株式報酬の価値を準解析的に導出する．最後に，第 4 節（と 2026 年 7 月号の数学的補論）では，業績連動型株式報酬の価値の，株価と業績との相関への依存性についての数理解析を行う．

2. 業績連動型株式報償制度の評価モデル

評価モデルを構築するに当たり，

(a) ブラック＝ショールズ・モデルのように，実務関係者に広く使われるよう，できる限り単純で，過度に数学的に難解とならないものにすること，

(b) 業績条件には標準となり得るものを設定すること，

(c) 業績と株価は相関（確率的依存性・関連性）を持ち得ると仮定すること，

(d) 現実の業績の時間変動を描写する確率モデルを目指すこと，

(e) モデルに現れるパラータの同定が容易であること，

の 5 点を主たる目標とする．

（必ずしも独立ではない）2 つのブラウン運動が定義され，リスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ が導入された適当（適切）な確率空間の上で，以下の株価と業績との同時（結合）確率モデルを考える：

連続時間 $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$上で企業活動がなされ，離散時間 $\mathbb{Z}_+ := \{0,1,\ldots\} \subset \mathbb{R}_+$において会計・財務上の報告・開示がなされるものとする．ただし，簡単のため，単位時間を 1（年）として，時点 $T-1$ から時点 Tまでの時間区間 $(T-1,T]$を第 T 期（間）と呼ぶ．（ストック・オプションを含む）株式報酬制度が適用される時刻を時点 0 とする．

2.1 株価モデル $(\boldsymbol{S_t, t \geq 0})$：

ブラック・ショールズ・モデルと同様，時点 t での株価 S_t は幾何ブラウン運動に従うと仮定する：

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma_S S_t \mathrm{d}W_t^S, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

すなわち，

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S\right\} = S_0 \mathrm{e}^{X_t}, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

あるいは，対数株価 $X_t := \ln S_t - \ln S_0$は

$$\mathrm{d}X_t = \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma_S^2\right)\mathrm{d}t + \sigma^S \mathrm{d}W_t^S, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

すなわち，

$$X_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S = \mu_X t + \sigma_S W_t^S, \quad t \geq 0 \tag{4}$$

ここで $(W_t^S, t \geq 0)$は標準ブラウン運動，$r \geq 0$は連続複利での無リスク利子率，$\sigma_S > 0$はボラティリティ・パラメータであり，$\mu_X := r - \frac{1}{2}\sigma_S^2$としている．このとき，$W_t^S \sim N(0,t)$により，$X_t \sim N(\mu_X t, \sigma_S^2 t)$ となる．

2.2 業績モデル $(\boldsymbol{C_n, n = 1, 2, \ldots})$：

企業の業績は，通常，年度ごとや四半期ごとに開示される．この非連続的［離散時間的］な業績を連続時間モデルによって表現するために，まず，日々の業績よりもさらに小さい微小区間での業績強度［率］過程を考える．時点 $s \geq 0$ での業績強度を Y_sとし，$(Y_s, s \geq 0)$ を業績強度過程と呼び，ドリフト付きブラウン運動（本 2026 年 6 月号）とオルンシュタイン＝ウーレンベック過程（次 2026 年 7 月号）の 2 通りのガウス過程を考える．

松本，大西，田中［12］では，まずはドリフト付きブラウン運動を用いて，

$$\mathrm{d}Y_s = \mu_Y \mathrm{d}s + \sigma_Y \mathrm{d}W_s^Y, \quad s \geq 0, \tag{5}$$

すなわち，

$$Y_s = Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y, \quad s \geq 0 \tag{6}$$

とモデル化した．ただし $(W_s^Y, s \geq 0)$ は標準ブラウン運動，Y_0は初期値，μ_Y，σ_Y はパラメータである．また 2 つの標準ブラウン運動 $(W_t^S, t \geq 0), (W_s^Y, s \geq 0)$ の相関を $\rho_{SY} \in [-1,1]$ とする，すなわち，それらの共変分（交差変分）を $\langle W^S, W^Y \rangle_t = \rho_{SY} \cdot t$，$t \geq 0$と仮定する．

つぎに，この業績強度過程 $(Y_s, s \geq 0)$ から累積業績過程を，

$$I_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}s = \int_0^t (Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y)\mathrm{d}s, \quad t \geq 0 \tag{7}$$

で定義し，$(Y_s, s \geq 0)$ に基づいて，第 n 期の業績 C_nを以下のように定義する：

$$C_n := I_n - I_{n-1} = \int_{n-1}^n Y_s \mathrm{d}s, \quad n \geq 1 \tag{8}$$

すなわち，業績強度 Y_s の期間中での累積がその期の業績 C_nであると考える．

業績強度過程 $(Y_s, s \geq 0)$ はガウス過程であり，従って累積業績過程 $(I_s, s \geq 0)$も同様であるので，その確率法則は，平均関数：

$$\mu_I(t) := \mathbb{E}[I_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t Y_s \mathrm{d}s\right] = Y_0 t + \frac{1}{2}\mu_Y t^2, \quad t \geq 0 \tag{9}$$

と自己共分散関数：

$$\sigma_I(s,t) := \mathrm{Cov}[I_s, I_t] = \mathrm{Cov}\left[\int_0^s Y_u \mathrm{d}u, \int_0^t Y_v \mathrm{d}v\right] = \frac{1}{6}\sigma_Y^2 s^2(3t - s), \quad 0 \leq s \leq t < \infty \tag{10}$$

によって完全に記述される．とくに，分散関数は

$$\sigma_I^2(t) := \sigma_I(t,t) = \mathrm{Var}[I_t] = \frac{1}{3}\sigma_Y^2 t^3, \quad t \geq 0 \tag{11}$$

となる（上記・下記の計算導出過程の詳細については大西［3］を参照されたい）．

また，対数株価過程 $(X_s, s \geq 0)$と累積業績過程 $(I_t, t \geq 0)$との（交差）共分散関数は

$$\sigma_{XI}(s,t) := \mathrm{Cov}[X_s, I_t] = \mathrm{Cov}\left[X_s, \int_0^t Y_u \mathrm{d}u\right] = \begin{cases} \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y s\left(t - \frac{1}{2}s\right), & 0 \leq s \leq t < \infty; \\ \frac{1}{2}\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y t^2, & 0 \leq t \leq s < \infty \end{cases} \tag{12}$$

と計算される．

このとき，業績評価期間の第 T 期（$T \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} := \{1, 2, \ldots\}$）の業績 $C_T := I_T - I_{T-1} = \int_{T-1}^T Y_s \mathrm{d}s$ は正規分布 $N(\mu_C, \sigma_C^2)$に従う，ただし，

$$\mu_C := \mu_C(T) := \mathbb{E}[C_T]; \ \sigma_C^2 := \sigma_C^2(T) := \mathrm{Var}[C_T]$$

は所与の諸パラメータからつぎのように導出される：

一般的に，$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++}$ に対して，

$$\mu_C(n) \coloneqq \mathbb{E}[C_n] = \mathbb{E}\left[\int_{n-1}^{n} Y_s \mathrm{d}s\right] = Y_0 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mu_Y;$$

$$\sigma_C^2(n) \coloneqq \mathrm{Var}[C_n] = \mathrm{Var}\left[\int_{n-1}^{n} Y_s \mathrm{d}s\right] = \left(n - \frac{2}{3}\right)\sigma_Y^2.$$

また，一般的に，$m, n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++}$, $m \neq n\ (n-1 \geq m)$とすると，C_nとC_mの共分散は，

$$\sigma_C(n,m) \coloneqq \mathrm{Cov}[C_n, C_m] = \mathrm{Cov}\left[\int_{n-1}^{n} Y_t \mathrm{d}t\,, \int_{m-1}^{m} Y_u \mathrm{d}u\right] = \left(m - \frac{1}{2}\right)\sigma_Y^2 = \left(\min\{m,n\} - \frac{1}{2}\right)\sigma_Y^2.$$

したがって，下記を得る：

$$\mu_C = \mu_C(T) = \mathbb{E}[C_T] = Y_0 + \left(T - \frac{1}{2}\right)\mu_Y;$$

$$\sigma_C^2 = \sigma_C^2(T) = \mathrm{Var}[C_T] = \mathrm{Cov}[C_T, C_T] = \sigma_C(T,T) = \left(T - \frac{2}{3}\right)\sigma_Y^2.$$

さらに，一般的に，$m, n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++}$とすると，$X_n$と C_mの共分散は，$n \geq m$ のときは，

$$\sigma_{XC}(n,m) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_n, C_m] = \mathrm{Cov}\left[X_n, \int_{m-1}^{m} Y_u \mathrm{d}u\right] = \mathrm{Cov}\left[\sigma_S W_n^S, \int_{m-1}^{m} \sigma_Y W_u^Y \mathrm{d}u\right] = \left(m - \frac{1}{2}\right)\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y;$$

$n \leq m-1$ のときは，下記のように計算される：

$$\sigma_{XC}(n,m) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_n, C_m] = \mathrm{Cov}\left[X_n, \int_{m-1}^{m} Y_u \mathrm{d}u\right] = \mathrm{Cov}\left[\sigma_S W_n^S, \int_{m-1}^{m} \sigma_Y W_u^Y \mathrm{d}u\right] = n\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y.$$

あるいは累積業績過程 $(I_s, s \geq 0)$ の平均関数 $\mu_I(t)$，$t \geq 0$，自己共分散関数 $\sigma_I(s,t), 0 \leq s,t \leq \infty$ の表現から，下記を得る：

$$\mu_C(n) \coloneqq \mathbb{E}[C_n] = \mathbb{E}[I_n] - \mathbb{E}[I_{n-1}] = \mu_I(n) - \mu_I(n-1) = Y_0 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mu_Y, \quad n \geq 1; \tag{13}$$

$$\sigma_C(m,n) \coloneqq \mathrm{Cov}[C_m, C_n] = \left(m - \tfrac{1}{2}\right)\sigma_Y^2 = \left(\min\{m,n\} - \tfrac{1}{2}\right)\sigma_Y^2, \quad 0 \leq m-1 < m \leq n-1 < n < \infty; \tag{14}$$

$$\sigma_C^2(n) \coloneqq \sigma_C(n,n) = \mathrm{Var}[C_n] = \mathrm{Var}[I_n - I_{n-1}] = \mathrm{Cov}[I_n - I_{n-1}, I_n - I_{n-1}] = \left(n - \frac{1}{2}\right)\sigma_Y^2, \quad n \geq 1 \tag{15}$$

と表現される．

最後に，（離散時間に埋め込まれた）対数株価過程 $(X_s, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}_+)$と業績過程 $(C_n, n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++})$ の（交差）共分散関数は，対数株価過程 $(X_s, s \geq 0)$と累積業績過程 $(I_t, t \geq 0)$との（交差）共分散関数 $\sigma_{XI}(s,t), 0 \leq s,t < \infty$ の表現から，

$$\sigma_{XC}(m,n) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_m, C_n] = \mathrm{Cov}[X_m, I_n - I_{n-1}] = \sigma_{XI}(m,n) - \sigma_{XI}(m,n-1), m = 0,1,\ldots;\ n = 1,2,\ldots \tag{16}$$

を計算することで求められる．とくに，$m = n = T \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++}$のときは，

$$\sigma_{XC} \coloneqq \sigma_{XC}(T,T) = \mathrm{Cov}[X_T, C_T] = \mathrm{Cov}[X_T, I_T - I_{T-1}] = \sigma_{XI}(T,T) - \sigma_{XI}(T,T-1), \quad T = 1,2,\ldots \tag{17}$$

と計算される．

3. 業績連動型株式報酬制度のリスク中立価値評価 $\boldsymbol{P_T, T \geq 1}$

満期（行使日）T を持ち，直前の第 T 期の業績 C_Tに連動して，時刻 Tの株価に依存した報酬 $g(S_T) \cdot h(C_T)$ を授与される業績連動株式報酬制度の価値評価を行う，ただし，$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ はペイオフ関数，$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$は業績連動関数である．

リスク中立確率測度$\mathbb{Q}$を用いた，いわゆるリスク中立価値評価公式に基づけば，

$$P_T \coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T) \cdot h(C_T)] \tag{18}$$

によって公正価値が求められる[3]，ここで，$r \geq 0$は連続複利による無リスク利子率である．

[3] 金融市場で高い流動性で売買される金融デリバティブの無裁定価値評価を行うための方法を株式報酬制度の公正価値の評価に適用することに対しては，異論・反論はあって然るべきと思われる．

3.1 業績条件付ストック・オプションの価格式の導出

まずは，満期（行使日）T を持ち，業績 C_T に下限 L の条件の付けられた断崖型（cliff）業績連動（業績条件付き）ストック・オプションの価値 $P_T(L)$ の評価を考える．

リスク中立評価公式（18）によれば，下記の通りに計算される．

$$P_T(L) \coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T) \cdot h(C_T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}[S_T - K]_+ \cdot 1_{\{C_T > L\}}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}[S_T - K]_+; C_T > L], \tag{19}$$

ただし，

$$g(S_T) \coloneqq [S_T - K]_+ \coloneqq \max\{S_T - K, 0\} \tag{20}$$

は通常の（プレーンな）コール・オプションのペイオフ関数で，

$$h(C_T) \coloneqq 1_{\{C_T > L\}} \coloneqq \begin{cases} 1, & C_T > L; \\ 0, & C_T \le L \end{cases} \tag{21}$$

は（断崖（cliff）型と呼ばれる）業績連動関数である．ここで，

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X; A]$：事象 A 上に制限された確率変数 X の期待値[4]，

r：連続複利での無リスク利子率,

T：満期,

S_T：時点 T における株価,

K：権利行使価格,

C_T：第 T 期における業績,

L：ストック・オプション行使のための業績の下限,

e^{-rT}：現在価値への割引率

とする．

第 2 節のモデルのもとでは対数株価 X_T と業績 C_T とは 2 変量正規分布に従うことに注意する：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ C_T \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \sigma_{XC} \\ \sigma_{XC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right] = N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} \\ \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right]. \tag{22}$$

ただし，σ_{XC}, ρ_{XC} も所与の諸パラメータから導出される．そこで，式（19）を以下のように書き換える：

$$P_T(L) = S_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{X_T - rT}; X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right] - K\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{Q}\left(X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right), \quad L \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

上式（22）の最右辺を業績 C_T について条件付け，標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z)$ を用いて表現すれば，ブラック・ショールズ・モデルによるオプション価格式と対比的に，

$$\begin{aligned} P_T(L) = \int_{c_T = L}^{\infty} \Bigg\{ & S_0 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T + (1 - \rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T + \rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}\left(\frac{c_T - \mu_C}{\sigma_C}\right)}{\sqrt{(1 - \rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}}\right) \\ & \times \exp\left((\mu_X - r)T + \frac{(1 - \rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}{2} + \rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}\left(\frac{c_T - \mu_C}{\sigma_C}\right)\right) \\ & - K\mathrm{e}^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T + \rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}\left(\frac{c_T - \mu_C}{\sigma_C}\right)}{\sqrt{(1 - \rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}}\right)\Bigg\} f_{C_T}(c_T)\mathrm{d}c_T \end{aligned} \tag{24}$$

と表される，ただし，

$$f_{C_T}(c_T) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_C^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c_T - \mu_C}{\sigma_C}\right)^2\right\} \tag{25}$$

とする．

[4] 期待値演算がリスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ のもとでなされることを協調したいときにのみ $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot]$ と明示的に表記する．

あるいは，相関 ρ_{XC}の 2 変量標準正規分布関数 $\Phi_2(x,y;\rho_{XC})$ を用いて，以下のようにも整理される[5]：

$$P_T(L)=S_0\Phi_2\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\mu_X T}{\sigma_S\sqrt{T}}+\sigma_S\sqrt{T},\frac{\mu_C-L}{\sigma_C}+\rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T};\rho_{XC}\right)-K\mathrm{e}^{-rT}\Phi_2\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\mu_X T}{\sigma_S\sqrt{T}},\frac{\mu_C-L}{\sigma_C};\rho_{XC}\right),L\in\mathbb{R} \quad (26)$$

続いて，一般的な業績連動関数 $h(\cdot)$ を持つ業績連動のストック・オプションについては，その価値評価公式：

$$P_T[h]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T)\cdot h(C_T)] \quad (27)$$

において，段階的業績連動関数 $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ が，例えば，

(i) 上下に有界;

(ii) 単調非減少;

(iii) $h(-\infty)\coloneqq\lim_{C\to-\infty}h(C)=0$;

(iv) 右連続

であれば，ルベーグ＝スティルチェス積分を用いて，

$$h(C)=\int_{-\infty}^{C}\mathrm{d}h(L)=\int_{-\infty}^{\infty}1_{\{C>L\}}\mathrm{d}h(L)=\int_{\mathbb{R}}1_{\{C>L\}}\mathrm{d}h(L),\qquad C\in\mathbb{R} \quad (28)$$

と書けることから，フビニの定理を用いて，下記の価格式を得ることができる：

$$P_T[h]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T)\cdot h(C_T)]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T)\cdot 1_{\{C_T>L\}}\right]\mathrm{d}h(L)=\int_{-\infty}^{\infty}P_T(L)\mathrm{d}h(L). \quad (29)$$

上式（29）は，ペイオフ関数がプレーンなコール・オプション型：

$$g(S_T)\coloneqq[S_T-K]_+\coloneqq\max\{S_T-K,0\}$$

に限定されずとも，

$$P_T(L)\coloneqq\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T)\cdot 1_{\{C_T>L\}}\right]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T);C_T>L], \quad (30)$$

が解析的・準解析的・数値的に評価できれば，有用な価値評価公式となる．

4. 業績連動型株式報酬の価値 $\boldsymbol{P_T}$ の相関係数 $\boldsymbol{\rho_{SY}}$ への依存性

一般的なペイオフ関数 $g(\cdot)$と段階的業績連動関数 $h(\cdot)$ を持つ業績連動型株式報酬制度の価値評価公式：

$$P_T[h]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T)\cdot h(C_T)]. \quad (31)$$

に対して，下記の比較静学結果を得る．

定理：可積分性に関する適当な正則条件のもとで，業績連動型株式報酬制度の公正価値 $P_T[h]$は，ペイオフ関数 $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$，段階的業績連動関数 $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ がともに非負値の単調非減少関数ならば，株価過程 $(S_t,t\geq 0)$ と業績強度過程 $(Y_s,s\geq 0)$ とをそれぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数 ρ_{SY}の単調非減少関数である．

証明：次 2026 年度 7 月号の数学的補論参照．

□

注：さらに一般的には，各期ごとの業績 $C_1,C_2,\ldots,C_T$ について，段階的業績連動関数 $h_1,h_2,\ldots,h_T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ が設定されて，満期において，価値

$$g(S_T)\cdot h_1(C_1)\cdot h_2(C_2)\cdot\cdots\cdot h_T(C_T) \quad (32)$$

が授与される業績連動型株式報酬制度のリスク中立価値評価式：

---

[5] 吉羽要直氏（東京都立大学教授）より，相関を持つ 2 変量正規分布の累積分布関数を用いた，積分を含まない，簡潔な表現（26）が可能であることを御教示頂いた．ここに記して感謝の意を表する．

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T)\cdot h_1(C_1)\cdot h_2(C_2)\cdot \cdots \cdot h_T(C_T)] \tag{32}$$

においても同様の比較静学結果を得る．

5. おわりに

本稿では，業績連動の株式報酬制度の価値評価のための，株価と業績との同時（結合）確率モデルを提案した．株価としては幾何ブラウン運動モデル，そして業績強度［率］過程としては，本 2026 年 6 月号では，ドリフト付きブラウン運動モデルを提案し，株価と業績強度［率］過程を駆動する 2 つのブラウン運動間に相関を持たせることで，株価と業績との確率的依存関係を持たせることに成功した．また，特定のシンプルな業績条件／連動の株式報酬制度であれば，準解析的な価値評価公式を導出することができた．

他方，以下のような問題も残されている．

(1) 株価と業績との同時（結合）確率モデルに含まれるパラメータの統計的推定の問題：

- (i) まずは株価の（準）連続時間観測，あるいは離散時間観測によってパラメータ σ_S を推定し，
- (ii) その後に，離散時間での株価と業績の同時観測により，パラメータ Y_0, μ_Y, σ_Y，そして ρ_{SY}を，原則，最尤推定法によって推定すれば良い［(離散時間の）株価と業績との 2 変量のガウス過程の平均値関数と（自己／交差）共分散関数は第 2 節において導出済みであるため，（対数）尤度関数は解析的に表現することができる］

が，実務上は，より簡便な統計的手法によって推定できることが望まれる；

(2) 売上げや利益を業績の指標としたとき，統計的には，できる限り，頻度の高いデータが望まれるが，月次，あるいは四半期データとすれば，その季節性をどのようにモデル自身に組み込み，そしてその効率的統計的推定を行うのか，

等，困難な問題が残されてはいるが，実務で採用される標準的評価モデルとなり得ることを目指して，今後の課題として取り組みたい．

謝辞

本研究は日本学術振興会科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）課題番号：25K00650，課題番号：25K05203による支援も受けている．ここに記して感謝の意を表する．

参考文献

[1] ウイリス・タワーズワトソン，三菱 UFJ 信託銀行（2017），「株式報酬の導入状況」．
https://www.willistowerswatson.com/ja-JP/news/2017/08/Stock-based-compensation-implementation-status-survey.

[2] ウイリス・タワーズワトソン（2023），「WTW、『日米欧 CEO および社外取締役報酬比較』2023 年調査結果を発表」（2023 年 8 月 17 日）
https://www.wtwco.com/ja-jp/news/2023/08/report-fy2022-comparison-of-compensation-for-ceos-and-ned-between-japan-the-united-states-and-europe

[3] 大西匡光（2024），「連続時間モデルに基づく業績連動株式報酬制度の価値評価」，大和大学研究紀要第 10 巻（情報学部編），pp. 79—94.

[4] 大西匡光，田中寧々（2021），「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価の方法」，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021 年度春季研究発表会アブストラクト集，2021.

[5] 株式会社プルータス・コンサルティング（2023），「上場会社におけるインセンティブプランの導入状況，メールマガジン No. 146（2023 年 4 月 28 日号）
https://www.plutuscon.jp/reports/21806
2023 年 1 2 月 1 日閲覧

[6] 株式会社プルータス・コンサルティング編（2020），「新株予約権等・種類株式の発行戦略と評価：資金調達、インセンティブ、M＆A、事業承継での活用」，中央経済社.

[7] 椎葉　淳，瀧野一洋（2010），「ストック・オプションの評価誤差：理論・実証研究からの示唆」，名古屋商科大学総合経営・経営情報論集，第 54 巻 2 号, pp. 89—107.

[8] 田中寧々（2020),「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」, 大阪大学経済学部, 懸賞論文, 2020 年 1 月.
[9] 中村慎二（2017),「新しい株式報酬制度の設計と活用－有償ストック・オプション＆リストリクテッド・ストックの考え方」中央経済社, 2017.
[10] 中村慎二（2020),「ストック・オプション評価上の問題～業績条件の取扱い」ディスクロージャー ＆ IR, Vol. 15, pp. 1—10, 2020 年月.
[11] 中村慎二（2023),「株式報酬制度の設計と課題－リストリクテッド・ストック＆業績条件付ストック・オプションの活用」中央経済社, 2023.
[12] 松本敏幸, 大西匡光, 田中寧々（2021),「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」,「ファイナンスの数理解析とその応用」, 京都大学数理解析研究所 講究録, No. 2173, pp. 73—94, 2021.
[13] 呂 思南, 大西匡光, 田中寧々「連続時間モデルに基づく業績連動ストック・オプションの価値評価」「ファイナンスの数理解析とその応用」, 京都大学数理解析研究所 講究録, No. 2237, pp. 40—51, 2023.
[14] Bettis, J. C., Bizjak, J., Coles, J., and Kalpathy, S. (2018), Performance-Vesting Provisions in Executive Compensation, *Journal of Accounting and Economics*, 66 (1), pp. 194—211.
[15] Cvitanić, J., Wiener, Z., and Zapatero, F. (2007), Analytic Pricing of Employee Stock Options, *Review of Financial Studies*, **21** (2), pp. 683-724.
[16] Cvitanić, J. and Zhang, J. (2012), *Contract Theory in Continuous-Time Models*, Springer.
[17] Cvitanić, J. and Zapatero, F. (2004), *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, MIT press.
[18] Fujimoto, M. (2018a), 「業績条件付きストックオプションの理論価格」(The Theoretical Value of a Performance-Vested Stock Option) (April 4, 2018).
Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3156048 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3156048
[19] Fujimoto, M. (2018b), The Theoretical Price of a Share-Based Payment with Performance Conditions and Implications for the Current Accounting Standards (June 20, 2018).
Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3199849 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3199849
[20] Hull, J. C. (2022), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 11th Ed., Pearson.
[21] Hull, J. C. and White, A. (2004), How to Value Employee Stock Options, *Financial Analysts Journal*, **60** (1), pp. 114—119.
[22] Kimura, T. (2010), Valuing Executive Stock Options: A Quadratic Approximation, *European Journal of Operational Research*, **207** (3), pp. 1368—1379.
[23] Kimura, T. (2018), An Approximate Barrier Option Model for Valuing Executive Stock Options, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **61** (1), pp. 110—131.
[24] Lyu Shinan (2022), *Pricing of Performance-Vesting Employee Stock Options: Based on Variable Performance Conditions*, Master Thesis, Graduate School of Economics, Osaka University, January, 2022.
[25] Müller, A. (2001), Stochastic Ordering of Multivariate Normal Distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **53** (3), pp. 567—575.
[26] Ross, S. M. (1996), *Stochastic Processes*, 2nd Ed., Wiley.
[27] Rüschendorf, L. (2013), *Mathematical Risk Analysis: Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios*, Springer.
[28] Tong, Y. L. (1990), *The Multivariate Normal Distribution*, Springer.
[29] Wainwright, M. J. (2019), *High-Dimensional Statistics: A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press.