

## 連続時間モデルに基づく業績連動株式報酬制度の価値評価Ⅱ

大西 匡光<sup>1</sup>

### 1. はじめに

本稿（2026年6月号，7月号）<sup>2</sup>の目的は，連続時間モデルに基づく業績連動株式報酬制度の価値評価モデルを提案することである．近年，欧米諸国には遅れをとりながらも，我が国でも様々な産業，とりわけ成長産業でストック・オプション，リストラクテッド・ストック（譲渡制限付き株式），パフォーマンス・シェア等々の株式報酬制度への関心は高まりつつある．しかしながら，売上げや利益などの業績に連動させた株式報酬制度を評価する標準的な方法は無く，各企業が独自の判断で価値評価しており，公正とは言えない状況にある．そこで，業績連動の無い通常のストック・オプションにおいて実務上慣習的に適用されるブラック＝ショールズ・モデルに業績連動を組み込む形で，業績連動株式報酬制度の価値評価のための連続時間の確率モデルの枠組みを提案・紹介する．

株式報酬制度とは，企業が役員／従業員に対して，株式そのものや株価を参照して額が定まる現金によって報酬を授与する制度で，業績や株価に条件を付けたり，連動させたりして，支給する株式報酬が決定されるインセンティブ報酬制度の一群である．企業の業績や株価が授与する報酬と直接結びつくため，役員／従業員へのインセンティブ，すなわち経営努力／労働意欲による成果に対する動機付けを引き出し，株主企業価値の向上への意識を高めることに繋がることが期待される．

これまで多様な種類の株式報酬制度が実施されているが，最近の企業の事例を見ると，売上げ（高）や利益などの業績に条件を付したり，連動させたりする，いわゆる業績連動型株式報酬制度を実施している割合が多くなって来ている．ここでいう業績条件とは，例えば，ある年度の営業利益が所定の額以上のとき，権利行使が可能になるといった類いのものである．株式報酬制度は，役員／従業員に付与されるため，このような業績条件を付すことで，役員の経営努力や従業員の労働意欲を，より直接的に向上させるインセンティブに繋がるという効果が期待できる．実際に，業績連動の株式報酬制度の実施によって業績の向上（つまり，売上げや利益の上昇）に繋がっている企業の事例が多いことから，業績連動の株式報酬制度に対するさらなる関心の高まりが予想される．

ここで会計処理・税務上問題となるのが，それら株式報酬制度の公正価値の評価である．例えば，ストック・オプションを例に挙げれば，その発行価格（いわゆる払込価額）の評価の問題がある．ストック・オプションは，あらかじめ決められた価格で株式を購入できる権利であるため，発行価格によっては，ストック・オプション所有者が特に有利な金額で株式を購入できる場合があり，既存の株主の利益を害する可能性がある．そのため，発行価格を如何に設定するかが重要な問題となる．

オプションの評価モデルとしては，金融工学／数理・計量ファイナンスでの標準的なモデルとして，ブラック＝ショールズ・モデルがある（例えば，Cvitanic and Zapatero [17], Hull [20]）．これは，ヨーロピアン・オプション（権利行使期間の最終日〔満期〕にのみ，権利行使可能なオプション）を，リスク中立確率測度のもとで，株価，行使価格，無リスク利子率，分散（ボラティリティ），期間という5つのパラメータを用いて評価する，単純で明確なモデルである．このブラック＝ショールズ・モデルは，使いやすく，公正さや認知度からみても非常に有用なため，実務でも広く慣習的に使われている．

しかしながら，業績条件付きストック・オプションは，通常のストック・オプションと比較して権利行使可能性に制限がかかり，そのためオプション価値にも影響を与えるものと考えられる．また，ブラック＝ショールズ公式を適用したとしても，業績条件については多くの仮定や前提を必要とするため，評価者によって評価額に幅が出てしまう．したがって，業績条件付きストック・オプションの評価にブラック＝ショールズ公式を適用するのは，会計的にも不適切であるとも言える．それにもかかわらず，業績条件付きストック・オプションを発行している企業がその価値評価の方法として採用しているのは，ブラック＝ショールズ公式である．それは業績条件付きストック・オプションの一般的で標準的な評価モデルが存在しないことに起因する．ここに，ブラック＝ショールズ・モデルとは異なる，新しい業績条件付きストック・オプションの価値評価方法が求められている．

<sup>1</sup> 大和大学 情報学部 情報学科，大阪大学 数理・データ科学教育研究センター [招へい教授]，大阪大学 名誉教授

<sup>2</sup> 2026年6月号，7月号のそれぞれのレポートを単独でも読むことができるよう，できる限り自己完結的なものとするため，重複する記述を敢えて避けない．

本稿の目的は、著者らが[3], [4], [8], [12], [13], [24]で行ってきた、業績条件付きストック・オプションの価値評価の試みを、下記の 3 点で拡張・一般化することにある：

- (i) 業績モデルの基礎となる業績密度 [率] 過程を、ドリフト付きブラウン運動（前 2026 年 6 月号）に加えて、オルンシュタイン＝ウーレンベック過程（本 2026 年 7 月号）をも扱えるようにすること；
- (ii) 業績条件が満たされた場合にのみ株式報酬が支払われる断崖（cliff）型の業績連動の形態をより一般化すること；
- (iii) 支払われる報酬（ペイオフ）を、プレーンなコール・オプション型に限定せず、より一般化すること。

本稿は以下のように構成される。まず、第 2 節で株価と業績（オルンシュタイン＝ウーレンベック過程で表現）の同時（結合）確率モデルを導入し、第 3 節において業績連動型株式報酬の価値を準解析的に導出する。最後に、第 4 節と数学的補論では、業績連動型株式報酬の価値の、株価と業績との相関への依存性についての数理解析を行う。

## 2. 業績連動型株式報酬制度の評価モデル

評価モデルを構築するに当たり、

- (a) ブラック＝ショールズ・モデルのように、実務関係者に広く使われるよう、できる限り単純で、過度に数学的に難解とならないものにする、
  - (b) 業績条件には標準となり得るものを設定すること、
  - (c) 業績と株価は相関（確率的依存性・関連性）を持ち得ると仮定すること、
  - (d) 現実の業績の時間変動を描写する確率モデルを目指すこと、
  - (e) モデルに現れるパラメータの同定が容易であること、
- の 5 点を主たる目標とする。

（必ずしも独立ではない）2 つのブラウン運動が定義され、リスク中立確率測度  $\mathbb{Q}$  が導入された適当（適切）な確率空間の上で、以下の株価と業績との同時（結合）確率モデルを考える：

連続時間  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$  上で企業活動がなされ、離散時間  $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \dots\} \subset \mathbb{R}_+$  において会計・財務上の報告・開示がなされるものとする。ただし、簡単のため、単位時間を 1（年）として、時点  $T-1$  から時点  $T$  までの時間区間  $(T-1, T]$  を第  $T$  期（間）と呼ぶ。（ストック・オプションを含む）株式報酬制度が適用される時刻を時点 0 とする。

### 2.1 株価モデル ( $S_t, t \geq 0$ ) :

ブラック＝ショールズ・モデルと同様、時点  $t$  での株価  $S_t$  は幾何ブラウン運動に従うと仮定する：

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_S S_t dW_t^S, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

すなわち、

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) t + \sigma_S W_t^S \right\} = S_0 e^{X_t}, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

あるいは、対数株価  $X_t := \ln S_t - \ln S_0$  は

$$dX_t = \left( r - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) dt + \sigma_S dW_t^S, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

すなわち、

$$X_t = \left( r - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) t + \sigma_S W_t^S = \mu_X t + \sigma_S W_t^S, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

ここで  $(W_t^S, t \geq 0)$  は標準ブラウン運動、 $r \geq 0$  は連続複利での無リスク利子率、 $\sigma_S > 0$  はボラティリティ・パラメータであり、 $\mu_X := r - \frac{1}{2} \sigma_S^2$  としている。このとき、 $W_t^S \sim N(0, t)$  により、 $X_t \sim N(\mu_X t, \sigma_S^2 t)$  となる。

### 2.2 業績モデル ( $C_n, n = 1, 2, \dots$ ) :

企業の業績は、通常、年度ごとや四半期ごとに開示される。この非連続的「離散時間的」な業績を連続時間モデルによって表現するために、まず、日々の業績よりもさらに小さい微小区間での業績強度 [率] 過程を考える。時点  $s \geq 0$  での業績強度を  $Y_s$  とし、 $(Y_s, s \geq 0)$  を業績強度過程と呼び、前 2026 年 6 月号ではドリフト付きブラウン運動を採用した場

合を扱ったが、本 2026 年 7 月号では、業績強度過程として、ドリフト付きブラウン運動を（形式的には）拡張して、次に扱うべきガウス過程である、下記のオルンシュタイン＝ウーレンベック過程（OU 過程、短期金利のバシチェック・モデル）で記述することを考える：

$$dY_s = (a - bY_s)ds + \sigma_Y dW_s^Y = b \cdot \left(\frac{a}{b} - Y_s\right) ds + \sigma_Y dW_s^Y, \quad s \geq 0 \quad (5)$$

ただし、 $a, b, \sigma_Y$  はパラメータである（ $b = 0$  の場合が、形式的には、ドリフト付きブラウン運動となる）。

この確率微分方程式は簡単に解くことができ、

$$Y_s = \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) e^{-bs} + \sigma_Y \int_0^s e^{-b(s-u)} dW_u^Y = \mu_Y(s) + \sigma_Y \int_0^s e^{-b(s-u)} dW_u^Y, \quad s \geq 0 \quad (6)$$

を得る。ただし、

$$\mu_Y(s) := \mathbb{E}[Y_s] = \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) e^{-bs}, \quad s \geq 0 \quad (7)$$

とする。前 2026 年 6 月号と同様、この業績強度過程（ $Y_s, s \geq 0$ ）から累積業績過程を求めれば、

$$I_t = \int_0^t Y_s ds = \int_0^t \left( \mu_Y(s) + \sigma_Y \int_0^s e^{-b(s-u)} dW_u^Y \right) ds = \int_0^t \mu_Y(s) ds + \sigma_Y \int_0^t \left( \int_0^s e^{-b(s-u)} dW_u^Y \right) ds, \quad t \geq 0 \quad (8)$$

を得る。ここで、確率的フビニ公式を用いれば、(8)式の最右辺の第 2 項は

$$\int_{s=0}^t \left( \int_{u=0}^s e^{-b(s-u)} dW_u^Y \right) ds = \int_{u=0}^t \left( \int_{s=u}^t e^{-b(s-u)} ds \right) dW_u^Y = \int_{u=0}^t \beta(t-u) dW_u^Y \quad (9)$$

と書ける。ただし、

$$\beta(t) := \int_0^t e^{-bs} ds = \frac{1}{b} (1 - e^{-bt}), \quad t \geq 0 \quad (10)$$

と置いた。この関数  $\beta(\cdot)$  を用いれば、

$$\int_0^t \mu_Y(s) ds = \int_0^t \left\{ \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) e^{-bs} \right\} ds = \frac{a}{b} t + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \beta(t) \quad (11)$$

と計算されるので、累積業績過程（ $I_t, t \geq 0$ ）の表現：

$$I_t = \int_0^t Y_s ds = \int_0^t \mu_Y(s) ds + \sigma_Y \int_0^t \left( \int_0^s e^{-b(s-u)} dW_u^Y \right) ds = \frac{a}{b} t + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \beta(t) + \sigma_Y \int_0^t \beta(t-u) dW_u^Y, \quad t \geq 0 \quad (12)$$

を得る。

最後に、この累積業績過程（ $I_s, s \geq 0$ ）を使って、第  $n$  期の業績  $C_n$  を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} C_n &:= I_n - I_{n-1} = \int_{n-1}^n Y_s ds = \int_{n-1}^n \mu_Y(s) ds + \sigma_Y \left[ \int_0^n \beta(n-u) dW_u^Y - \int_0^{n-1} \beta((n-1)-u) dW_u^Y \right] \\ &= \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \{\beta(n) - \beta(n-1)\} + \sigma_Y \left[ \int_0^n \beta(n-u) dW_u^Y - \int_0^{n-1} \beta((n-1)-u) dW_u^Y \right], \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (13)$$

業績強度過程（ $Y_s, s \geq 0$ ）はガウス過程であり、従って累積業績過程（ $I_s, s \geq 0$ ）も同様であるので、その確率法則は、平均関数：

$$\mu_I(t) := \mathbb{E}[I_t] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t Y_s ds \right] = \int_0^t \mathbb{E}[Y_s] ds = \int_0^t \mu_Y(s) ds = \frac{a}{b} t + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \beta(t), \quad t \geq 0 \quad (14)$$

と自己共分散関数：

$$\begin{aligned} \sigma_I(s, t) &:= \text{Cov}[I_s, I_t] = \sigma_Y^2 \int_0^{\min\{s, t\}} \beta(s-u) \cdot \beta(t-u) du = \sigma_Y^2 \int_0^s \beta(s-u) \cdot \beta(t-u) du \\ &= \sigma_Y^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left[ s - (\beta(s) + \beta(t)) + \frac{1}{2} (\beta(t-s) + \beta(s+t)) \right], \quad 0 \leq s \leq t < \infty \end{aligned} \quad (15)$$

によって完全に記述される。とくに、分散関数は

$$\sigma_I^2(t) := \sigma_I(t, t) := \text{Cov}[I_t, I_t] = \text{Var}[I_t] = \sigma_Y^2 \int_0^t \beta(t-u)^2 du = \sigma_Y^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left[ t - 2\beta(t) + \frac{1}{2} \beta(2t) \right], \quad t \geq 0. \quad (16)$$

また、対数株価過程（ $X_s, s \geq 0$ ）と累積業績過程（ $I_t, t \geq 0$ ）との（交差）共分散関数は

$$\begin{aligned}
\sigma_{XI}(s, t) &:= \text{Cov}[X_s, I_t] = \rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y \int_0^{\min\{s, t\}} \beta(t-u) du = \rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y \int_0^{\min\{s, t\}} \frac{1 - e^{-b \cdot (t-u)}}{b} du \\
&= \begin{cases} \frac{\rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y}{b} \left\{ s - \frac{e^{-b \cdot (t-s)} - e^{-b \cdot t}}{b} \right\} = \frac{\rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y}{b} \{s - e^{-b \cdot (t-s)} \beta(s)\}, & 0 \leq s \leq t < \infty; \\ \frac{\rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y}{b} \left\{ t - \frac{1 - e^{-b \cdot t}}{b} \right\} = \frac{\rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y}{b} \{t - \beta(t)\}, & 0 \leq t \leq s < \infty \end{cases} \quad (17)
\end{aligned}$$

と計算される。

これらから離散時間のガウス過程となる業績過程  $(C_n, n \geq 1)$  の平均関数, 自己共分散関数, 分散関数は, それぞれ

$$\mu_C(n) := \mathbb{E}[C_n] = \mathbb{E}[I_n] - \mathbb{E}[I_{n-1}] = \mu_I(n) - \mu_I(n-1) = \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \{\beta(n) - \beta(n-1)\}, \quad n \geq 1; \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_C(m, n) &:= \text{Cov}[C_m, C_n] = \text{Cov}[I_m - I_{m-1}, I_n - I_{n-1}] \\
&= \text{Cov}[I_m, I_n] - \text{Cov}[I_m, I_{n-1}] - \text{Cov}[I_{m-1}, I_n] + \text{Cov}[I_{m-1}, I_{n-1}] \\
&= \sigma_Y^2 \cdot \frac{1}{b^2} \\
&\quad \cdot \left[ -\frac{1}{2} \beta(n-m-1) + \beta(n-m) - \frac{1}{2} \beta(n-m+1) + \frac{1}{2} \beta(n+m-2) - \beta(n+m-1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \beta(n+m) \right], \quad 0 \leq m-1 < m \leq n-1 < n < \infty; \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_C^2(n) &:= \sigma_C(n, n) = \text{Var}[C_n] = \text{Var}[I_n - I_{n-1}] = \text{Cov}[I_n - I_{n-1}, I_n - I_{n-1}] = \text{Var}[I_n] - 2\text{Cov}[I_{n-1}, I_n] + \text{Var}[I_{n-1}] \\
&= \sigma_I^2(n) - 2\sigma_I(n-1, n) + \sigma_I^2(n-1) \\
&= \sigma_Y^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left[ 1 - \beta(1) + \frac{1}{2} \beta(2n-2) - \beta(2n-1) + \frac{1}{2} \beta(2n) \right], \quad n \geq 1 \quad (20)
\end{aligned}$$

と表現される。

最後に, 対数株価過程  $(X_s, s \geq 0)$  と業績過程  $(C_n, n \geq 1)$  の (交差) 共分散関数は

$$\sigma_{XC}(m, n) := \text{Cov}[X_m, C_n] = \text{Cov}[X_m, I_n - I_{n-1}] = \text{Cov}[X_m, I_n] - \text{Cov}[X_m, I_{n-1}] = \sigma_{XI}(m, n) - \sigma_{XI}(m, n-1), \quad 0 \leq m < \infty; 1 \leq n < \infty; \quad (21)$$

$$\sigma_{XC}(s, t) := \text{Cov}[X_s, C_t] = \text{Cov}[X_s, I_t - I_{t-1}] = \text{Cov}[X_s, I_t] - \text{Cov}[X_s, I_{t-1}] = \sigma_{XI}(s, t) - \sigma_{XI}(s, t-1), \quad 0 \leq s < \infty; 1 \leq t < \infty \quad (22)$$

を計算することで求められる。とくに,  $m = n = T$  のときは,

$$\begin{aligned}
\sigma_{XC} &:= \sigma_{XC}(T, T) = \text{Cov}[X_T, C_T] = \text{Cov}[X_T, I_T - I_{T-1}] = \text{Cov}[X_T, I_T] - \text{Cov}[X_T, I_{T-1}] = \sigma_{XI}(T, T) - \sigma_{XI}(T, T-1) \\
&= \frac{\rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y}{b} \{1 - (\beta(T) - \beta(T-1))\} = \frac{\rho_{SY} \sigma_S \sigma_Y}{b} \left\{ 1 - \frac{e^{-b \cdot (T-1)} - e^{-b \cdot T}}{b} \right\}, \quad 1 \leq T < \infty \quad (23)
\end{aligned}$$

と計算される。

### 3. 業績連動型株式報酬制度のリスク中立価値評価 $P_T, T \geq 1$

満期 (行使日)  $T$  を持ち, 直前の第  $T$  期の業績  $C_T$  に連動して, 時刻  $T$  の株価に依存した報酬  $g(S_T) \cdot h(C_T)$  を授与される業績連動型株式報酬制度の価値評価を行う。ただし,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  はペイオフ関数,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は業績連動関数である。

リスク中立確率測度  $\mathbb{Q}$  を用いた, いわゆるリスク中立価値評価式に基づけば,

$$P_T := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot h(C_T)] \quad (24)$$

によって公正価値が求められる<sup>3</sup>。ここで,  $r \geq 0$  は連続複利による無リスク利子率である。

#### 3.1 業績条件付ストック・オプションの価格式の導出

まずは, 満期 (行使日)  $T$  を持ち, 業績  $C_T$  に下限  $L$  の条件の付けられた断崖型 (cliff) 業績連動 (業績条件付き) ストック・オプションの価値  $P_T(L)$  の評価を考える。

リスク中立評価公式 (18) によれば, 下記の通りに計算される。

$$P_T(L) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot h(C_T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} [S_T - K]_+ \cdot 1_{\{C_T > L\}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} [S_T - K]_+; C_T > L], \quad (25)$$

ただし,

$$g(S_T) := [S_T - K]_+ := \max\{S_T - K, 0\} \quad (26)$$

<sup>3</sup> 金融市場で高い流動性で売買される金融デリバティブの無裁定価値評価を行うための方法を株式報酬制度の公正価値の評価に適用することに対しては, 異論・反論はあって然るべきと思われる。

は通常の（プレーンな）コール・オプションのペイオフ関数で、

$$h(C_T) := 1_{\{C_T > L\}} := \begin{cases} 1, & C_T > L; \\ 0, & C_T \leq L \end{cases} \quad (27)$$

は（断崖（cliff）型と呼ばれる）業績連動関数である．ここで、

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X; A]$ ：事象  $A$  上に制限された確率変数  $X$  の期待値<sup>4</sup>，

$r$ ：連続複利での無リスク利率，

$T$ ：満期，

$S_T$ ：時点  $T$  における株価，

$K$ ：権利行使価格，

$C_T$ ：第  $T$  期における業績，

$L$ ：ストック・オプション行使のための業績の下限，

$e^{-rT}$ ：現在価値への割引率

とする．

第 2 節のモデルのもとでは対数株価  $X_T$  と業績  $C_T$  とは 2 変量正規分布に従うことに注意する：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ C_T \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \sigma_{XC} \\ \sigma_{XC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix} \right] = N \left[ \begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \rho_{XC} \sigma_S \sigma_C \sqrt{T} \\ \rho_{XC} \sigma_S \sigma_C \sqrt{T} & \sigma_C^2 \end{pmatrix} \right] \quad (28)$$

ただし、 $\sigma_{XC}$ ,  $\rho_{XC}$  も所与の諸パラメータから導出される．そこで、式 (19) を以下のように書き換える：

$$P_T(L) = S_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{X_T - rT}; X_T > \ln \left( \frac{K}{S_0} \right), C_T > L \right] - K e^{-rT} \mathbb{Q} \left( X_T > \ln \left( \frac{K}{S_0} \right), C_T > L \right), \quad L \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

上式 (29) の最右辺を業績  $C_T$  について条件付け、標準正規分布の累積分布関数  $\Phi(z)$  を用いて表現すれば、ブラック＝ショールズ・モデルによるオプション価格式と対比的に、

$$\begin{aligned} P_T(L) = \int_{C_T=L}^{\infty} & \left\{ S_0 \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \mu_X T + (1 - \rho_{XC}^2) \sigma_S^2 T + \rho_{XC} \sigma_S \sqrt{T} \left( \frac{C_T - \mu_C}{\sigma_C} \right)}{\sqrt{(1 - \rho_{XC}^2) \sigma_S^2 T}} \right) \right. \\ & \times \exp \left( (\mu_X - r) T + \frac{(1 - \rho_{XC}^2) \sigma_S^2 T}{2} + \rho_{XC} \sigma_S \sqrt{T} \left( \frac{C_T - \mu_C}{\sigma_C} \right) \right) \\ & \left. - K e^{-rT} \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \mu_X T + \rho_{XC} \sigma_S \sqrt{T} \left( \frac{C_T - \mu_C}{\sigma_C} \right)}{\sqrt{(1 - \rho_{XC}^2) \sigma_S^2 T}} \right) \right\} f_{C_T}(C_T) dC_T \end{aligned} \quad (30)$$

と表される．ただし、

$$f_{C_T}(C_T) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_C^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{C_T - \mu_C}{\sigma_C} \right)^2 \right\} \quad (31)$$

とする．

あるいは、相関  $\rho_{XC}$  の 2 変量標準正規分布関数  $\Phi_2(x, y; \rho_{XC})$  を用いて、以下のようにも整理される<sup>5</sup>：

$$P_T(L) = S_0 \Phi_2 \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \mu_X T}{\sigma_S \sqrt{T}}, \frac{\mu_C - L}{\sigma_C} + \rho_{XC} \sigma_S \sqrt{T}; \rho_{XC} \right) - K e^{-rT} \Phi_2 \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \mu_X T}{\sigma_S \sqrt{T}}, \frac{\mu_C - L}{\sigma_C}; \rho_{XC} \right), \quad L \in \mathbb{R} \quad (32)$$

続いて、一般的な業績連動関数  $h(\cdot)$  を持つ業績連動のストック・オプションについては、その価値評価公式：

$$P_T[h] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot h(C_T)] \quad (33)$$

において、段階的業績連動関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が、例えば、

- (i) 上下に有界;
- (ii) 単調非減少;
- (iii)  $h(-\infty) := \lim_{C \rightarrow -\infty} h(C) = 0$ ;
- (iv) 右連続

<sup>4</sup> 期待値演算がリスク中立確率測度  $\mathbb{Q}$  のもとでなされることを協調したいときにのみ  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot]$  と明示的に表記する．

<sup>5</sup> 吉羽要直氏（東京都立大学教授）より、相関を持つ 2 変量正規分布の累積分布関数を用いた、積分を含まない、簡潔な表現 (32) が可能であることを御教示頂いた．ここに記して感謝の意を表する．

であれば、ルベーク＝スティルチェス積分を用いて、

$$h(C) = \int_{-\infty}^C dh(L) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{C>L\}} dh(L) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{C>L\}} dh(L), \quad C \in \mathbb{R} \quad (34)$$

と書けることから、フビニの定理を用いて、下記の価格式を得ることができる：

$$P_T[h] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot h(C_T)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot 1_{\{C_T>L\}}] dh(L) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(L) dh(L) \quad (35)$$

上式 (29) は、ペイオフ関数がプレーンなコール・オプション型：

$$g(S_T) := [S_T - K]_+ := \max\{S_T - K, 0\}$$

に限定されずとも、

$$P_T(L) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot 1_{\{C_T>L\}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T); C_T > L] \quad (36)$$

が解析的・準解析的・数值的に評価できれば、有用な価値評価公式となる。

#### 4. 業績連動型株式報酬の価値 $P_T$ の相関係数 $\rho_{SY}$ への依存性

一般的なペイオフ関数  $g(\cdot)$  と段階的業績連動関数  $h(\cdot)$  を持つ業績連動型株式報酬制度の価値評価公式：

$$P_T[h] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot h(C_T)]. \quad (37)$$

に対して、下記の比較静学結果を得る。

**定理：**可積分性に関する適当な正則条件のもとで、業績連動型株式報酬制度の公正価値  $P_T[h]$  は、ペイオフ関数  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 、段階的業績連動関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  がともに非負値の単調非減少関数ならば、株価過程  $(S_t, t \geq 0)$  と業績強度過程  $(Y_s, s \geq 0)$  とをそれぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数  $\rho_{SY}$  の単調非減少関数である。

**証明：**数学的補論参照。 □

**注：**さらに一般的には、各期の業績  $C_1, C_2, \dots, C_T$  について、段階的業績連動関数  $h_1, h_2, \dots, h_T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  が設定されて、満期において、価値

$$g(S_T) \cdot h_1(C_1) \cdot h_2(C_2) \cdots h_T(C_T) \quad (38)$$

が授与される業績連動型株式報酬制度のリスク中立価値評価式：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot h_1(C_1) \cdot h_2(C_2) \cdots h_T(C_T)] \quad (39)$$

においても同様の比較静学結果を得る。

#### 5. おわりに

本稿では、業績連動の株式報酬制度の価値評価のための、株価と業績との同時（結合）確率モデルを提案した。株価としては幾何ブラウン運動モデル、そして業績強度 [率] 過程としては、本 2026 年 7 月号では、オルンシュタイン＝ウーレンバック過程を提案し、株価と業績強度 [率] 過程を駆動する 2 つのブラウン運動間に相関を持たせることで、株価と業績との確率的依存関係を持たせることに成功した。また、特定のシンプルな業績条件／連動の株式報酬制度であれば、準解析的な価値評価公式を導出することができた。

他方、以下のような問題も残されている。

##### (1) 株価と業績との同時（結合）確率モデルに含まれるパラメータの統計的推定の問題

- (i) まずは株価の（準）連続時間観測、あるいは離散時間観測によってパラメータ  $\sigma_S$  を推定し、
- (ii) その後に、離散時間での株価と業績の同時観測により、パラメータ  $Y_0, a, b, \sigma_Y$ 、そして  $\rho_{SY}$  を、原則、最尤推定法によって推定すれば良い〔（離散時間の）株価と業績との 2 変量のガウス過程の平均値関数と（自己／交差）共分散関数は第 2 節において導出済みであるため、（対数）尤度関数は解析的に表現することができる〕が、実

務上は、より簡便な統計的手法によって推定できることが望まれる。

(2) 売上げや利益を業績の指標としたとき、統計的には、できる限り、頻度の高いデータが望まれるが、月次、あるいは四半期データとすれば、その季節性をどのようにモデル自身に組み込み、そしてその効率的統計的推定を行うのか、等、困難な問題が残されているが、実務で採用される標準的評価モデルとなり得ることを目指して、今後の課題として取り組みたい。

## 謝辞

本研究は日本学術振興会科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）課題番号：25K00650，課題番号：25K05203による支援も受けている。ここに記して感謝の意を表する。

## 参考文献

- [1] ウイリス・タワーズワトソン，三菱 UFJ 信託銀行（2017），「株式報酬の導入状況」。  
<https://www.willistowerswatson.com/ja-JP/news/2017/08/Stock-based-compensation-implementation-status-survey>.
- [2] ウイリス・タワーズワトソン（2023），「WTW、『日米欧 CEO および社外取締役報酬比較』2023 年調査結果を発表」（2023 年 8 月 17 日）  
<https://www.wtwco.com/ja-jp/news/2023/08/report-fy2022-comparison-of-compensation-for-ceos-and-ned-between-japan-the-united-states-and-europe>
- [3] 大西匡光（2024），「連続時間モデルに基づく業績連動株式報酬制度の価値評価」，大和大学研究紀要第 10 巻（情報学部編），pp. 79—94.
- [4] 大西匡光，田中寧々（2021），「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価の方法」，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021 年度春季研究発表会アブストラクト集，2021.
- [5] 株式会社ブルータス・コンサルティング（2023），「上場会社におけるインセンティブプランの導入状況，メールマガジン No. 146（2023 年 4 月 28 日号）  
<https://www.plutuscon.jp/reports/21806>  
2023 年 12 月 1 日閲覧
- [6] 株式会社ブルータス・コンサルティング編（2020），「新株予約権等・種類株式の発行戦略と評価：資金調達、インセンティブ、M&A、事業承継での活用」，中央経済社.
- [7] 椎葉 淳，瀧野一洋（2010），「ストック・オプションの評価誤差：理論・実証研究からの示唆」，名古屋商科大学総合経営・経営情報論集，第 54 巻 2 号，pp. 89—107.
- [8] 田中寧々（2020），「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」，大阪大学経済学部，懸賞論文，2020 年 1 月.
- [9] 中村慎二（2017），「新しい株式報酬制度の設計と活用—有償ストック・オプション&リストラクテッド・ストックの考え方」中央経済社，2017.
- [10] 中村慎二（2020），「ストック・オプション評価上の課題～業績条件の取扱い」ディスクロージャー & IR，Vol. 15，pp. 1—10，2020 年 11 月.
- [11] 中村慎二（2023），「株式報酬制度の設計と課題—リストラクテッド・ストック&業績条件付ストック・オプションの活用」中央経済社，2023.
- [12] 松本敏幸，大西匡光，田中寧々（2021），「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」，「ファイナンスの数理解析とその応用」，京都大学数理解析研究所 講究録，No. 2173，pp. 73—94，2021.
- [13] 呂 思南，大西匡光，田中寧々「連続時間モデルに基づく業績連動ストック・オプションの価値評価」「ファイナンスの数理解析とその応用」，京都大学数理解析研究所 講究録，No. 2237，pp. 40—51，2023.
- [14] Bettis, J. C., Bizjak, J., Coles, J., and Kalpathy, S. (2018), Performance-Vesting Provisions in Executive Compensation, *Journal of Accounting and Economics*, 66 (1), pp. 194—211.
- [15] Cvitanić, J., Wiener, Z., and Zapatero, F. (2007), Analytic Pricing of Employee Stock Options, *Review of Financial Studies*, 21 (2), pp. 683-724.
- [16] Cvitanić, J. and Zhang, J. (2012), *Contract Theory in Continuous-Time Models*, Springer.

- [17] Cvitanić, J. and Zapatero, F. (2004), *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, MIT press.
- [18] Fujimoto, M. (2018a), 「業績条件付きストックオプションの理論価格」(The Theoretical Value of a Performance-Vested Stock Option) (April 4, 2018).  
Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3156048> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3156048>
- [19] Fujimoto, M. (2018b), The Theoretical Price of a Share-Based Payment with Performance Conditions and Implications for the Current Accounting Standards (June 20, 2018).  
Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3199849> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3199849>
- [20] Hull, J. C. (2022), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 11th Ed., Pearson.
- [21] Hull, J. C. and White, A. (2004), How to Value Employee Stock Options, *Financial Analysts Journal*, 60 (1), pp. 114—119.
- [22] Kimura, T. (2010), Valuing Executive Stock Options: A Quadratic Approximation, *European Journal of Operational Research*, 207 (3), pp. 1368—1379.
- [23] Kimura, T. (2018), An Approximate Barrier Option Model for Valuing Executive Stock Options, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 61 (1), pp. 110—131.
- [24] Lyu Shinan (2022), *Pricing of Performance-Vesting Employee Stock Options: Based on Variable Performance Conditions*, Master Thesis, Graduate School of Economics, Osaka University, January, 2022.
- [25] Müller, A. (2001), Stochastic Ordering of Multivariate Normal Distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 53 (3), pp. 567—575.
- [26] Ross, S. M. (1996), *Stochastic Processes*, 2nd Ed., Wiley.
- [27] Rüschendorf, L. (2013), *Mathematical Risk Analysis: Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios*, Springer.
- [28] Tong, Y. L. (1990), *The Multivariate Normal Distribution*, Springer.
- [29] Wainwright, M. J. (2019), *High-Dimensional Statistics: A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press.

## A. 数学的補論<sup>6</sup>

下記の共分散不等式は良く知られている（例えば，Ross [26]）。

### 補題 A.1 [共分散不等式]

$X$  を実数値確率変数とし， $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を単調非減少関数， $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を単調非減少（非増加）関数とする．このとき，

$$\text{Cov}[g(X), h(X)] \geq (\leq) 0,$$

すなわち，

$$\mathbb{E}[g(X) h(X)] \geq (\leq) \mathbb{E}[g(X)] \mathbb{E}[h(X)]$$

が成り立つ．ただし，上記のすべての期待値は存在するものと仮定する．

**証明：**Ross[26]，大西[3]を参照.

□

上記の補題から直接的に下記の系を得る．

### 系 A.1

確率ベクトル  $(X, Y)$  が相関  $\rho_{XY} \in [-1, 1]$  を持つ 2 変量の正規分布:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y \\ \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \right]$$

に従うものとし， $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を単調非減少関数とすると，

<sup>6</sup> この数学的補論において採用する記法（例えば，確率変数  $X, Y$ , 等）は本文中とは異なるので注意されたい．

$$\rho_{XY} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0 \text{ のとき } \mathbb{E}[g(X) h(Y)] \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} \mathbb{E}[g(X)] \mathbb{E}[h(Y)]$$

が成り立つ [複号同順] .

**証明：**大西[3]を参照.

□

上記の系から、満期  $T$  における対数株価  $X_T$  と業績  $C_T$  とが確率的に独立 [無相関] であるとした際のストック・オプションの価値評価

$$P_T[h] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T) \cdot h(C_T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} g(S_T)] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(C_T)],$$

すなわち、ブラック＝ショールズ公式に連動業績の期待値を乗じた値は、それらの相関係数  $\rho_{XC}$  が正（負）のとき、したがって、遡って、株価過程と業績強度過程それぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数  $\rho_{SY}$  が正（負）のときには、過小評価（過大評価）となることが分かる。

つぎの象限順序 (orthant orderings) の概念を準備する (例えば, Rüschendorf [27], Tong [28]) . これらの確率順序概念は、信頼性理論、極値理論等の応用確率論、数理統計学の分野で、多変量の確率ベクトルにおいて、それらを構成する確率変数間の（正の）確率的依存性の強さを比較する際に用いられてきた<sup>7</sup>.

#### 定義 A.1 [象限順序]

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1, 2, \dots\}$  とする.  $n$  変量の確率ベクトル  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  に対して:

- (1) [上方象限順序 (Upper Orthant Order)]  $\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$  が成り立つとは,

$$\mathbb{P}(X_1 > z_1, \dots, X_n > z_n) \leq \mathbb{P}(Y_1 > z_1, \dots, Y_n > z_n), \forall \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つときを言う;

- (2) [下方象限順序 (Lower Orthant Order)]  $\mathbf{X} \leq_{lo} \mathbf{Y}$  が成り立つとは,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq z_1, \dots, X_n \leq z_n) \leq \mathbb{P}(Y_1 \leq z_1, \dots, Y_n \leq z_n), \forall \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つときを言う;

- (3) [諧調順序 (Concordance Order)]  $\mathbf{X} \leq_c \mathbf{Y}$  が成り立つとは,  $\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$  かつ  $\mathbf{X} \leq_{lo} \mathbf{Y}$ , すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 > z_1, \dots, X_n > z_n) &\leq \mathbb{P}(Y_1 > z_1, \dots, Y_n > z_n); \\ \mathbb{P}(X_1 \leq z_1, \dots, X_n \leq z_n) &\leq \mathbb{P}(Y_1 \leq z_1, \dots, Y_n \leq z_n), \end{aligned} \quad \forall \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つときを言う.

#### 注 A.1

- (1)  $n = 1$  の場合 ( $X = \mathbf{X} = X_1$ ,  $Y = \mathbf{Y} = Y_1$  とすれば)

$$X \leq_{uo} Y \Leftrightarrow Y \leq_{lo} X \Leftrightarrow X \leq_{st} Y$$

が成り立つ. ただし, 確率変数  $X, Y$  に対して通常の確率順序 (Ordinary Stochastic Order)  $X \leq_{st} Y$  が成り立つとは,

$$\mathbb{P}(X > z) \leq \mathbb{P}(Y > z), \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \left( \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leq z) \geq \mathbb{P}(Y \leq z), \quad \forall z \in \mathbb{R} \right)$$

が成り立つときを言う;

- (2)  $n = 1$  の場合 ( $X = \mathbf{X} = X_1$ ,  $Y = \mathbf{Y} = Y_1$  とすれば)

$$X \leq_c Y \Leftrightarrow X =_d Y \Leftrightarrow X =_{st} Y$$

が成り立つ, すなわち,

$$\mathbb{P}(X > z) = \mathbb{P}(Y > z), \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \left( \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leq z) = \mathbb{P}(Y \leq z), \quad \forall z \in \mathbb{R} \right)$$

が成り立つ;

- (3)  $n = 2$  で,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  と  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$  の周辺分布が等しい, すなわち,

$$X_1 =_d Y_1, \quad X_2 =_d Y_2$$

<sup>7</sup> ただし, 著者の知る限り, 定着した邦訳名は未だ無いように思われるので, 筆者の命名案に依っている.

が成り立つものとする。このとき、

$$(1 - \mathbb{P}(X_1 \leq z_1)) = \mathbb{P}(X_1 > z_1) = \mathbb{P}(X_1 > z_1, X_2 > z_2) + \mathbb{P}(X_1 > z_1, X_2 \leq z_2), \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2;$$

$$(1 - \mathbb{P}(X_2 > z_2)) = \mathbb{P}(X_2 \leq z_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq z_1, X_2 \leq z_2) + \mathbb{P}(X_1 > z_1, X_2 \leq z_2), \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2;$$

$$(1 - \mathbb{P}(Y_1 \leq z_1)) = \mathbb{P}(Y_1 > z_1) = \mathbb{P}(Y_1 > z_1, Y_2 > z_2) + \mathbb{P}(Y_1 > z_1, Y_2 \leq z_2), \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2;$$

$$(1 - \mathbb{P}(Y_2 > z_2)) = \mathbb{P}(Y_2 \leq z_2) = \mathbb{P}(Y_1 \leq z_1, Y_2 \leq z_2) + \mathbb{P}(Y_1 > z_1, Y_2 \leq z_2), \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$$

において、 $X_1 =_d Y_1$ ,  $X_2 =_d Y_2$  から、

$$\mathbb{P}(X_1 \leq z_1) = \mathbb{P}(Y_1 \leq z_1), \forall z_1 \in \mathbb{R} \left( \Leftrightarrow \mathbb{P}(X_1 > z_1) = \mathbb{P}(Y_1 > z_1), \forall z_1 \in \mathbb{R} \right);$$

$$\mathbb{P}(X_2 \leq z_2) = \mathbb{P}(Y_2 \leq z_2), \forall z_2 \in \mathbb{R} \left( \Leftrightarrow \mathbb{P}(X_2 > z_2) = \mathbb{P}(Y_2 > z_2), \forall z_2 \in \mathbb{R} \right)$$

が成り立つので、任意の  $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  に対して、

$$\mathbb{P}(X_1 > z_1, X_2 > z_2) \leq \mathbb{P}(Y_1 > z_1, Y_2 > z_2)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_1 > z_1, X_2 \leq z_2) \geq \mathbb{P}(Y_1 > z_1, Y_2 \leq z_2)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_1 \leq z_1, X_2 \leq z_2) \leq \mathbb{P}(Y_1 \leq z_1, Y_2 \leq z_2)$$

が成り立ち、したがって、

$$X \leq_{uo} Y \Leftrightarrow X \leq_{lo} Y \Leftrightarrow X \leq_c Y$$

が成り立つ。

下記の補題も直接的に示すことができる。

#### 補題 A.2

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1, 2, \dots\}$  とする。  $n$  変量の確率ベクトル  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  に対して、下記の条件は等価である：

- (1)  $\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$ ;
- (2) すべての非負値の単調非減少関数  $h_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, \dots, n$  に対して、

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^n h_i(X_i) \right] \leq \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^n h_i(Y_i) \right]$$

が成り立つ。

証明：大西[3]を参照。 □

次の補題は、Slepian の不等式（例えば、Wainwright [29]）としてよく知られるタイプの不等式の 1 バージョンである。

#### 補題 A.3 [Slepian 型の不等式]

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1, 2, \dots\}$  とする。  $n$  変量の確率ベクトル  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  がいずれも  $n$  変量正規分布に従うとする：

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}_X, \Sigma_X); \mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_Y, \Sigma_Y),$$

ただし、

$$\boldsymbol{\mu}_X = (\mu_{X_i}, i = 1, \dots, n), \Sigma_X = (\sigma_{X_i X_j}, i, j = 1, \dots, n) = (\rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}, i, j = 1, \dots, n);$$

$$\boldsymbol{\mu}_Y = (\mu_{Y_i}, i = 1, \dots, n), \Sigma_Y = (\sigma_{Y_i Y_j}, i, j = 1, \dots, n) = (\rho_{Y_i Y_j} \sigma_{Y_i} \sigma_{Y_j}, i, j = 1, \dots, n).$$

このとき、

- (1)  $\mu_{X_i} = \mu_{Y_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

- (2)  $\sigma_{X_i} = \sigma_{Y_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$

を仮定する（すなわち、周辺分布が同じであると仮定する）と、

$$\sigma_{X_i X_j} \leq \sigma_{Y_i Y_j}, 1 \leq i < j \leq n \implies \mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$$

$$\left( \Leftrightarrow \left[ \rho_{X_i X_j} \leq \rho_{Y_i Y_j}, 1 \leq i < j \leq n \implies \mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y} \right] \right)$$

が成り立つ.

**証明:** Müller [25] を参照.

□

特に 2 変量正規分布に従う確率ベクトルについては下記が成り立つ.

## 系 A.2

確率ベクトル  $(X, Y)$  が相関  $\rho_{XY} \in [-1, 1]$  を持つ 2 変量の正規分布:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y \\ \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \right]$$

に従うものとする. このとき,

- (1)  $(X, Y)$  は, 相関  $\rho_{XY}$  が増加すれば, 上方象限順序  $\leq_{uo}$ , 下方象限順序  $\leq_{lo}$ , 階調順序  $\leq_c$  に関して単調非減少になる;
- (2) したがって,  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  をともに非負値の単調非減少関数とすると,

$$\mathbb{E}[g(X) h(Y)]$$

は相関  $\rho_{XY}$  について単調非減少となる.

本資料に関する著作権は, 株式会社大阪取引所にあります.

本資料の一部又は全部を無断で転用, 複製することはできません.

本資料の内容は, 株式会社日本取引所グループおよびグループ各社 (株式会社東京証券取引所, 株式会社大阪取引所, 株式会社東京商品取引所, 株式会社 J P X 総研, 日本取引所自主規制法人および日本証券クリアリング機構) の意見・見解を示すものではありません.

本資料は, デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません.

筆者, 株式会社日本取引所グループおよび上記グループ各社は, 本資料に基づく投資あるいは類似の行為により発生した如何なる損失や損害に対して, 一切の責任を負うものではありません.