オプション価格から市場の変動リスクを測る

VXJ の背景と新しい計算方法

深澤 正彰

大阪大学大学院基礎工学研究科

1　将来の変動リスクを市場価格から測る

株式市場のリスクを考えるうえでは、価格がどちらに動くかとともに、変動の大きさを把握することが重要である。ボラティリティは投資判断やリスク管理、オプションの評価に広く用いられるが、将来の値は直接観測できず、過去の価格変動だけでは市場の見通しを捉えきれない。

そこで注目されるのが、オプション価格に含まれる情報である。将来の支払いを現在の価格に置き換えるオプションの市場価格には、将来の価格変動に対する市場参加者の評価が反映される。大阪大学では、日経平均オプションの市場価格からこの情報を集約するボラティリティ指数 VXJ を 2008 年から算出・公開している。[1] 算出方法は市場の状況に合わせて何度か改定しており、直近では 2026 年 5 月に大きく変更した。本稿では、その基礎となるモデルフリー・インプライド・ボラティリティ（model-free implied volatility、以下 MFIV）の背景と意義を説明し、VXJ の新しい計算方法を紹介する。

2　インプライド・ボラティリティ

オプション価格からボラティリティを求める基礎的な方法は、ブラック・ショールズ公式からの逆算である。観測価格と同式による理論価格が一致するようにボラティリティを選び、これをインプライド・ボラティリティと呼ぶ。しかし、同じ原資産、同じ満期のオプションでも、権利行使価格によって得られる値は異なる。現在の価格に近い権利行使価格のオプションと、大幅な下落時にのみ利益をもたらす権利行使価格のオプションとでは、価格に反映されるリスクの性質が異なり、それらが権利行使価格によらず一定の値となるのは、原資産価格がブラック・ショールズモデルと同じく対数正規分布する場合のみである。

モデルフリー・インプライド・ボラティリティは、幅広い権利行使価格のオプションを用いて情報を集約する。「モデルフリー」とは、原資産が特定の確率モデルに従うと仮定しないという意味であり、計算に前提や近似がないという意味ではない。

現在時刻を 0、満期までの期間を年単位で T、当該満期の先渡価格過程を $\{F_t\}$ とする。T-フォワード確率測度 $\mathbb{Q}$ のもとで $\{F_t\}$ が正の連続マルチンゲールである場合を考える。伊藤の公式より

$$\log \frac{F_T}{F_0} = \int_0^T \frac{\mathrm{d}F_t}{F_t} - \frac{1}{2}\langle \log F \rangle_T$$

が成立する。$\langle \log F \rangle_T$ は、対数価格の変動を二乗して累積した量、すなわち累積分散を表す。累積分散が可積分なら、上式の期待値を取って

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\langle \log F \rangle_T] = -2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\log \frac{F_T}{F_0}\right] \tag{1}$$

となる。この関係が、将来の累積分散と、満期時の価格だけで決まる支払いとを結び付ける。なお、価格にジャンプを許す場合には補正項が生じるため、以下の対数契約の価格を、一般の価格過程の累積分散と無条件に同一視することはできない。

[1] https://www-mmds.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/structure/activity/vxj.php

3　オプション価格の積分表示と指標の意味

任意の $x > 0$ について、部分積分によって次の恒等式が証明できる：

$$-\log\frac{x}{F_0} = -\frac{x-F_0}{F_0} + \int_0^{F_0}\frac{(K-x)^+}{K^2}\mathrm{d}K + \int_{F_0}^{\infty}\frac{(x-K)^+}{K^2}\mathrm{d}K, \tag{2}$$

ここで $y^+ = \max\{y, 0\}$ である。右辺の積分に現れる $(K-x)^+$ と $(x-K)^+$ は、$x = F_T$ とすればそれぞれ、原資産 F_T に対するプットとコールの満期時の支払いである。すなわち、(1) 式右辺に現れる対数に関係する支払いは、理論上は、先渡取引と、すべての権利行使価格のオプションの重み付き積分によって厳密に再現できる。実際の市場では権利行使価格が離散的なため、近似が必要となる。

満期に 1 を支払う割引債の価格を D とすれば、満期 T の無裁定なプット価格とコール価格は

$$P(K) = D\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(K-F_T)^+], \qquad C(K) = D\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(F_T-K)^+] \tag{3}$$

と与えられる。式 (2) に $x = F_T$ を代入して期待値を取り、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F_T] = F_0$ を用いると、モデルフリーの年率換算インプライド分散は

$$v(T) = \frac{2}{TD}\left\{\int_0^{F_0}\frac{P(K)}{K^2}\mathrm{d}K + \int_{F_0}^{\infty}\frac{C(K)}{K^2}\mathrm{d}K\right\} \tag{4}$$

で表される。年率換算 MFIV は $\sqrt{v(T)}$ であり、以下の数値表示では $100\sqrt{v(T)}$ を用いる。第 2 節の条件のもとでは、$v(T)$ は $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\langle\log F\rangle_T]/T$ に等しい。権利行使価格が先渡価格より低いプットと、高いコールが OTM（アウト・オブ・ザ・マネー）オプションであり、式 (4) はこれらの価格を K^{-2} で重み付けして集約する。

この指標の意義は、過去の価格変動とは異なる、将来に向けた市場の情報を得られる点にある。ただし、フォワード確率のもとでの期待値には、将来の事象の起こりやすさに加えて、その事象での支払いに対する市場の評価が含まれる。下落に備える保険の需要が強まれば、プット価格にはリスクを引き受けることへの対価も反映される。したがってこの指標は、実現ボラティリティの予測としてより、変動リスクに対する市場の価格評価として読む必要がある。

4　既存の計算方法と市場データの問題

式 (4) は、すべての権利行使価格についてオプション価格が得られる場合の理論式である。実際には、観測できる権利行使価格は離散的で、価格にはビッド（買い気配）とアスク（売り気配）の差がある。このため、積分を有限個の価格の和で近似する方法が用いられる。VIX 方式の代表的な計算式は

$$v_{\mathrm{disc}}(T) = \frac{2}{TD}\sum_i\frac{Q(K_i)\Delta K_i}{K_i^2} - \frac{1}{T}\left(\frac{F_0}{K_*}-1\right)^2 \tag{5}$$

である。$Q(K_i)$ は採用するオプションのビッド・アスク中間値、ΔK_i は権利行使価格の間隔に対応する重み、K_* は F_0 以下で最も近い採用権利行使価格である。K_* ではプットとコールの中間値を平均する。末尾の項は積分の切替点を F_0 から K_* に変更することに伴う補正の近似である [1]。

この方法には、まず観測範囲外の価格を切り捨てる問題がある。式 (4) の被積分関数は非負なので、外側の寄与の省略は分散を小さくする方向に働く。ただし、離散近似などの誤差も含めた計算値全体が、必ず過小評価になるという意味ではない。

第二の問題として、各中間値を独立に選ぶと、価格の相互関係が金融理論に反することがある。裁定機会を生じさせないため、プット価格は増加かつ凸、コール価格は減少かつ凸でなければならない。$K_1 < K_2$ に対して、傾きには

$$0 \le \frac{P(K_2)-P(K_1)}{K_2-K_1} \le D, \qquad -D \le \frac{C(K_2)-C(K_1)}{K_2-K_1} \le 0 \tag{6}$$

という制約もある。さらに、$K_1 < K_2 < K_3$ と $\lambda = (K_3-K_2)/(K_3-K_1)$ について、凸性は

$$P(K_2) \le \lambda P(K_1) + (1-\lambda)P(K_3) \tag{7}$$

と表される。両端のプットを λ 対 $1-\lambda$ で組み合わせた支払いは、中央のプットの支払い以上である。その価格が中央の価格より安ければ、両端を買い中央を売ることで裁定が可能になる。式 (7) は、この支払いと価格の関係を表す。ビッド・アスク差が大きければ中間値がこれらの関係を満たさない場合が多く、価格の観測値としての利用に疑問符が付く。仲値を用いる既存の算出方法では、気配差に基づく採用基準が設けられている。今回の検証では、第 2 限月で、仲値の選別後に計算に必要な価格が残らない日が多かった。

5　VXJ の計算手法

VXJ の新しい計算手法は論文 [2] に基づいて、ビッド・アスクを価格の許容範囲として利用し、凸な価格関数を構成する。ここでは論文 [2] そのままの手法ではなく、VXJ の実際の計算アルゴリズムを説明する。プットの入力を $K_1 < \cdots < K_n$、ビッドを B_i、アスクを A_i とし、$n \geq 2$ とする。

各 $i < n$ について、右側のアスクへの傾きの最小値を D で制限し、候補直線を

$$s_i = \min\left\{D, \min_{j>i} \frac{A_j - A_i}{K_j - K_i}\right\}, \qquad f_i(K) = A_i + s_i(K - K_i) \tag{8}$$

とする。このうち、すべての観測点でアスク以下となり、左側の少なくとも一つの観測点でビッドを下回る直線を採用する。その添字集合は

$$\mathcal{L} = \{i < n : f_i(K_\ell) \leq A_\ell \ (\ell = 1, \ldots, n), \quad f_i(K_\ell) < B_\ell \text{ となる } \ell < i \text{ が存在 }\} \tag{9}$$

である。

$\mathcal{L}$ が空でなければ $I = \min \mathcal{L}$、空なら $I = n$ と置き、左側のビッドから端点を補完する直線を

$$h(K) = A_I + s_0(K - K_I), \qquad s_0 = \min\left\{D, \min_{\ell<I} \frac{A_I - B_\ell}{K_I - K_\ell}\right\} \tag{10}$$

とする。最終的なプット価格は

$$\widehat{p}(K) = \max\{0, h(K), f_i(K) \ (i \in \mathcal{L})\} \tag{11}$$

である。

コール側では、各 $j > 1$ について左側のアスクへの傾きの最大値を $-D$ で下から制限し、$t_j = \max\{-D, \max_{i<j}(A_j - A_i)/(K_j - K_i)\}$ とする。直線 $A_j + t_j(K - K_j)$ が全観測点でアスク以下、かつ右側のいずれかのビッド未満となるものを採用する。採用添字の最大値を J とし、候補が空なら $J = 1$ とする。右側のビッドから求めた傾き $\max\{-D, \max_{\ell>J}(B_\ell - A_J)/(K_\ell - K_J)\}$ の補完直線を加え、ゼロとこれらの直線の最大値をコール価格 $\widehat{c}$ とする。

いずれも直線の最大値なので、構成価格は凸である。入力が各側の無裁定条件を満たすとき、プット側は非減少、コール側は非増加となり、傾きの制約も保たれる。図 1 にプット価格の構成例を示す。

入力価格データが無裁定条件を満たすとき、提案手法はプットのみの価格系とコールのみの価格系について、それぞれ無裁定性を保つことが証明できる。一方、両側の価格関数は独立に構成しており、プット・コール・パリティ $\widehat{p}(K) - \widehat{c}(K) = D(K - F_0)$ を満たす制約は課していない。したがって、パリティを含むプット・コール双方の価格系全体の無裁定性は保証していない。

新手法では、ゼロビッドや気配の幅の広さを理由に、その点や外側の権利行使価格を機械的に捨てる必要はない。例えば $B_i = 0$ も、$0 \leq \widehat{p}(K_i) \leq A_i$ という価格に関する情報である。有限なビッド・アスクの組が得られ、論文の無裁定条件を満たす場合、候補直線集合が空の場合にも価格関数を構成できる [2]。

構成した価格関数から求める年率換算 MFIV の二乗を

$$\widehat{v}(T) = \frac{2}{TD} \int_0^\infty \frac{\min\{\widehat{p}(K), \widehat{c}(K)\}}{K^2} \mathrm{d}K \tag{12}$$

とする。対応する価格系がプット・コール・パリティを満たせば、式 (4) と同じ表現である。無裁定条件のもとでは、プットの構成価格は原点付近で 0 となり、コールの構成価格は非負かつ非増加であるため、この積分は有限となる。計算に先渡価格を別途入力する必要がない点も、疎らな気配を扱う際に有用である。ただし、理論的な保証の前提は無裁定性であり、入力データに裁定機会が含まれる場合の処理は別途必要となる。

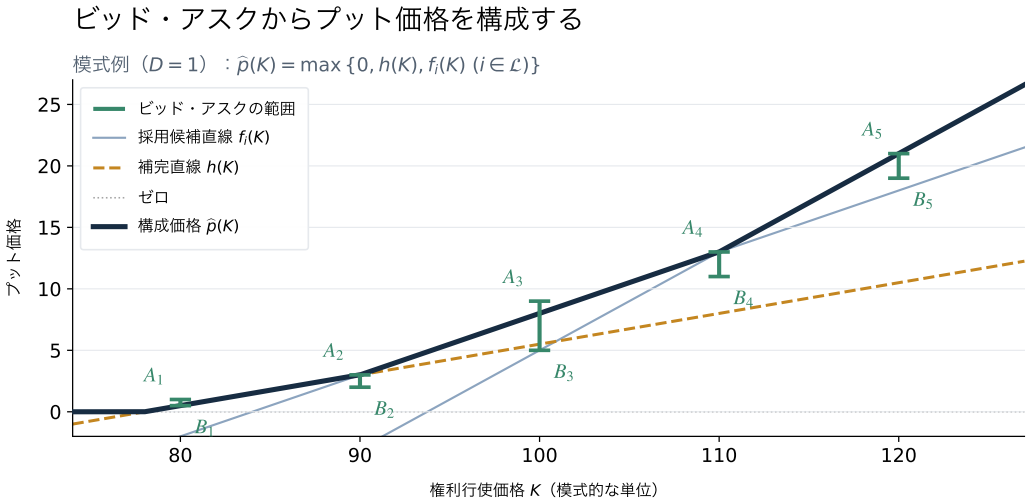


図 1: プット価格の構成（模式例）。$K=100$ では構成価格 8 がアスク 9 を下回る。

6　日経平均オプションによる MFIV 計算の検証

6.1　対象データと比較の条件

2025 年 3 月 31 日から 2026 年 3 月 27 日までの 243 日、月次オプションの 1,641,964 件の記録を用いた。2025 年分は 187 日、2026 年 1–3 月分は 56 日である。検証は満期別の年率換算 MFIV に絞り、満期間の補間は扱わない。

VXJ 方式では入力の前処理として、アスクが 0 であったり、売買気配が逆転しているデータを除く。また、プットではより高い権利行使価格のアスク以上となるビッド、コールではより低い権利行使価格のアスク以上となるビッドを持つ記録を除く。ゼロビッドや気配差の広さだけでは除外しない。

値の比較では、日経 VI の規則で選ばれる第 1 限月・第 2 限月を両方式に共通に用いた。日経 VI では SQ 日の 2 営業日前に対象限月を繰り上げるため、SQ 日に繰り上げる実運用コードの限月選択とは区別する。評価時刻を日中立会終了の 15 時 45 分、満期を SQ 日の 9 時とし、残存期間を両方式でそろえた。金利は両方式とも前営業日の TORF に統一した。

日経 VI は先渡価格を先物価格で代用するが、本検証では期近のプット・コール気配からパリティに整合する先渡価格の推定範囲（以下、候補区間）を求めた。候補区間が得られたのは 214 日（2025 年 171 日、2026 年 43 日）であり、残る 29 日は代用価格を決められず比較から除いた。以下は仲値に採用条件を適用した比較であり、約定値による補完や前回値の引継ぎは行わない。したがって、公表日経 VI そのものの再現ではない。

6.2　仲値の選別によって計算対象が失われる

日経 VI の公開要領 [3] では、買気配が 10 円以下で気配差が 4 円以上、10 円超で気配差が買気配の 30%以上、または売気配が買気配以下の場合、仲値を無効とする。さらに、ATM から 17 本目以降に無効または 1 円以下の価格が 5 本連続すると、その帯より外側を採用しない。この規則を適用し、先渡価格の推定範囲内で ATM・OTM の判定が変わる境界と、その間の採用結果を調べた。

次の表は、先渡価格の推定範囲内で ATM・OTM の判定を変えても、有効な OTM 仲値が 2 本未満となる日を示す。2 本以上は日経 VI 式を評価するための必要条件であり、それだけで ATM 調整に必要な価格までそろうとは限らない。

観測期間	評価可能日	第 1 限月：2 本未満	第 2 限月：2 本未満	第 2 限月：0 本
2025 年 3 月 31 日–12 月 30 日	171	1（0.6%）	127（74.3%）	84
2026 年 1 月 5 日–3 月 27 日	43	4（9.3%）	38（88.4%）	32
合計	214	5（2.3%）	165（77.1%）	116

評価できた 214 日のうち 165 日（77.1%）で、第 2 限月の計算に必要な仲値がそろわなかった。2026 年 1–3 月には 88.4%と約 9 割に達する。全体の 116 日（54.2%）では第 2 限月の採用仲値が 1 本も残らなかった。これらの価格不足は、先渡価格の推定範囲内で ATM・OTM の判定を変えても解消されなかった。

これらの日にもビッド・アスクは存在しており、VXJ 方式は 243 日の各日について両限月で有限値を得た。これは構成の性質に沿った結果であり、検証の要点は仲値の選別による価格不足の頻度にある。

6.3　両方式で計算できる日の値の比較

値の比較では代用先物価格を先渡価格候補区間の中点に固定した。日経 VI 式は、採用価格を権利行使価格の二乗で割った台形和、両端のゼロ価格への延長、および先物価格に最も近い権利行使価格でのプット・コール価格の調整からなる公開算式 [3] を用いた。

仲値の有効性と打切り規則を適用して、有効な OTM 仲値を持つ権利行使価格の集合を作り、その集合の中から代用価格に最も近い権利行使価格を ATM として選んだ。同距離なら低い権利行使価格を選ぶ。ATM 調整には、その権利行使価格のプット・コール両方の有効な価格が必要となる。反対側の仲値が無効な場合には約定値による補完を行わず、比較対象外とした。候補区間が得られた 214 日のうち、2 本以上の OTM 仲値と ATM 調整用の価格がそろったのは、第 1 限月 30 日、第 2 限月 2 日であった。以下の平均値は、限月ごとに両方式を計算できた同じ日だけから求めた。両方式の平均値は年率換算ボラティリティを%で表示し、差は「VXJ 方式 − 日経 VI 式」をパーセントポイントで表示する。

対象	比較日数	日経 VI 式平均（%）	VXJ 方式平均（%）	平均差（pt）	差の範囲（pt）
第 1 限月	30	22.86	26.72	+3.85	+0.36–+11.55
第 2 限月	2	29.25	31.35	+2.10	+0.27–+3.94

第 1 限月の比較日は 2025 年 28 日、2026 年 1–3 月 2 日であり、第 2 限月の 2 日はともに 2025 年であった。比較した 30 組・2 組では VXJ 方式がすべて高かったが、仲値と ATM 調整用の価格がそろう日に限った比較であり、全期間の水準差を示すものではない。金利の参照日は統一したが、利息係数は各算式に従い、VXJ 方式は指数関数、日経 VI 式は単利を用いた。

7　おわりに

モデルフリー・インプライド・ボラティリティを市場で計算するには、積分公式とともに、離散的な権利行使価格とビッド・アスクをどう扱うかが重要となる。VXJ の新しい計算法は、気配を一点の代表価格として選別する前に、価格の許容範囲として利用する。今回の日経平均オプションの検証では、日経 VI の仲値規則を適用すると、評価可能日の 77.1%、2026 年 1–3 月では 88.4%で、第 2 限月の計算に必要な価格が不足した。気配が存在していても、仲値の選別が計算を妨げるという点が実データで浮かび上がる。提案手法の意義は、こうした情報の喪失を避け、気配の幅を MFIV の計算に活かすことにある。

参考文献

[1] Cboe Global Markets. Cboe Volatility Index Mathematics Methodology. 公式解説資料.

[2] Fukasawa, M. and Murayama, S. (2026). Robust Volatility Index Calculation with OTM Option-implied Probability. arXiv:2605.17446.

[3] 日本経済新聞社（2025）.「日経平均ボラティリティー・インデックス」リアルタイム算出要領（2025 年 1 月 27 日版）. 公開算出要領.

本資料に関する著作権は、株式会社大阪取引所にあります。

本資料の一部又は全部を無断で転用、複製することはできません。

本資料の内容は、株式会社日本取引所グループおよびグループ各社（株式会社東京証券取引所、株式会社大阪取引所、株式会社東京商品取引所、株式会社ＪＰＸ総研、日本取引所自主規制法人および日本証券クリアリング機構）の意見・見解を示すものではありません。

本資料は、デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません。

筆者、株式会社日本取引所グループおよび上記グループ各社は、本資料に基づく投資あるいは類似の行為により発生した如何なる損失や損害に対して、一切の責任を負うものではありません。