オプションのスキューと価格変動への追随性

Skew Stickiness Ratio の理論と SPX データによる検証

深澤 正彰

大阪大学大学院基礎工学研究科

1　スキューの形だけでは分からないリスク

株価が下がったとき, オプションのインプライド・ボラティリティ（以下 IV）はどの程度上がるのだろうか. 同じ日に同じオプション価格を再現するモデルでも, 翌日の株価変動に対して IV をどのように動かすかは異なり得る. この違いは, オプションの評価額だけでなく, 保有ポジションのデルタヘッジにも影響する.

株価指数オプションでは, 一般に低い権利行使価格ほど IV が高い. この曲線の ATM（アット・ザ・マネー）近傍の傾きがスキューである. 一方, 株価と ATM IV の時間的な共変動は, ある時点のスキューだけからは決まらない. Bergomi が導入した Skew Stickiness Ratio（以下 SSR）は, ATM IV の株価への反応をスキューで規格化し, 両者を結び付ける指標である [1].

本稿では, SSR の意味と計算法を説明し, 筆者による最近の三つの研究を紹介する. 続いて, 2022〜2025 年の S&P 500 指数オプション（SPX）のデータから残存日数ごとの SSR を推定する. 全期間の点推定は短期側で約 1.6, 長期側で 1 に近づく形を示すが, 年による水準差も大きい.

2　Bergomi による定義とヘッジ上の意味

簡単のため金利と配当をゼロとし, $\mathbb{Q}$ を価格評価に用いるリスク中立確率とする. 時刻 t の原資産価格を S_t, 満期 T, 権利行使価格 K の IV を $\widehat{\sigma}_t(K,T)$ とし, $k=\log(K/S_t)$ とおく. ATM IV と ATM スキューを

$$\sigma_t^A(T)=\widehat{\sigma}_t(S_t,T),\qquad \psi_t(T)=\frac{\partial}{\partial k}\widehat{\sigma}_t(S_te^k,T)\bigg|_{k=0}=S_t\,\frac{\partial}{\partial K}\widehat{\sigma}_t(K,T)\bigg|_{K=S_t} \tag{1}$$

とおけば, 満期 T に対する SSR $\mathcal{R}_t(T)$ は

$$\mathcal{R}_t(T)=\frac{\beta_t(T)}{\psi_t(T)},\qquad \beta_t(T)=\frac{\mathrm{d}\langle\sigma^A(T),\log S\rangle_t}{\mathrm{d}\langle\log S\rangle_t}=S_t\frac{\mathrm{d}\langle\sigma^A(T),S\rangle_t}{\mathrm{d}\langle S\rangle_t} \tag{2}$$

と定義される. ここでは連続半マルチンゲールを考え, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は二次共変動を表す. 原資産の瞬間分散が正で, $\psi_t(T)\neq 0$ を仮定する. 実証では, 後述するように同じ満期の ATM IV の日次変化を, 前営業日のスキューと原資産の対数リターンの積に回帰し, SSR に対応する係数を直接推定する.

IV 曲面が K の関数 $\widehat{\sigma}_t(K,T)=f(K,T)$ となる sticky strike と呼ばれるモデルの下では, ATM の位置 $K=S_t$ が動くため $\beta=\psi$, したがって SSR は 1 となる. 一方 IV 曲線が k の関数 $\widehat{\sigma}_t(K,T)=f(\log(K/S_t),T)$ となる sticky delta と呼ばれるモデルの下では ATM IV が動かず, SSR は 0 となる.

IV 曲面の ATM での変化 $\mathrm{d}\sigma_t^A$ のうち, 拡散項には, 時刻 t での ATM の権利行使価格 $K=S_t$ に対するオプション IV の瞬間変化 $\mathrm{d}\widehat{\sigma}_t(K,T)$ に, 曲面上の ATM の移動による $(\psi_t/S_t)\mathrm{d}S_t$ が加わる. したがって $\mathrm{d}\widehat{\sigma}_t(K,T)$ の株価変動に連動する一次の反応は $(\beta_t/S_t-\psi_t/S_t)\mathrm{d}S_t$ である. そのため, 時刻 t で ATM にあるオプションの局所的な最小分散ヘッジのデルタには, ブラック・ショールズのデルタ Δ_{BS} に対して

$$\Delta_{\mathrm{hedge}}\simeq\Delta_{\mathrm{BS}}+\frac{\mathrm{Vega}}{S_t}\big(\mathcal{R}_t(T)-1\big)\psi_t(T) \tag{3}$$

という補正が生じる. ここで Vega は IV が 1 だけ変化したときの価格感応度である. この式は, 同じスキューを再現しても SSR が異なれば, ヘッジ比率も異なることを示している.

式 (2) の意味を確認するため, 満期 T を固定し, $X_t = \log S_t$, $A_t = \sigma_t^A(T)$ と略記する. 通常の回帰係数は共分散を説明変数の分散で割ったものである. 短時間の増分について条件付きで同じ計算をすると, 適切なモーメント条件と拡散係数の連続性のもとで

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathrm{Cov}_t(A_{t+h} - A_t,\, X_{t+h} - X_t)}{\mathrm{Var}_t(X_{t+h} - X_t)} = \frac{\mathrm{d}\langle A, X\rangle_t}{\mathrm{d}\langle X\rangle_t} = \beta_t \tag{4}$$

となる. 条件付き共分散・分散は, 現在の情報を固定した将来の短時間変動に関する量である. 連続時間では, 局所的に

$$\mathrm{d}A_t = b_t \mathrm{d}t + \beta_t \mathrm{d}X_t + \mathrm{d}M_t, \qquad \mathrm{d}\langle M, X\rangle_t = 0 \tag{5}$$

と分解できる. M は原資産リターンと瞬間的に無相関な連続局所マルチンゲールである. 両辺と X の二次共変動を取ると, ドリフト項と M の寄与は消え, $\mathrm{d}\langle A, X\rangle_t = \beta_t \mathrm{d}\langle X\rangle_t$ となる.

観測時刻 $t_0 < \cdots < t_n$ に対し, $\Delta_i A = A_{t_i} - A_{t_{i-1}}$, $\Delta_i X = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ と置く. 実現共分散と実現分散は

$$\mathrm{RCov}(A, X) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i A\, \Delta_i X, \qquad \mathrm{RV}(X) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i X)^2 \tag{6}$$

であり, 連続過程を細かく観測すると, それぞれ観測区間の二次共変動と二次変動へ収束する. したがって窓内の β を一定と近似する場合,

$$\widehat{\beta} = \frac{\mathrm{RCov}(A, X)}{\mathrm{RV}(X)} = \frac{\sum_i \Delta_i A\, \Delta_i X}{\sum_i (\Delta_i X)^2} \tag{7}$$

は切片なしの最小二乗回帰係数となる. 切片を入れる場合は, 増分からそれぞれの標本平均を引いて計算する. スキューも一定と近似できれば $\widehat{\mathcal{R}} = \widehat{\beta}/\psi$ である. 本稿の実証では時変スキューを扱うため, 後述の式 (15) を用いる.

3 最近の理論研究

3.1 ATM IV そのものを扱う表示公式

SSR をモデルの中で計算する際には, ATM IV の動学を求めなければならない. Bergomi の近似では, 将来の分散の条件付き期待値を満期まで平均し, その平方根で ATM IV を置き換える. この方法は計算しやすいが, IV と平均先渡分散の平方根は一般には一致しない. また, ATM の権利行使価格 $K = S_t$ 自体が時間とともに動くので, 固定した K についての通常の伊藤公式だけでは十分でない.

論文 [3] では, 伊藤・Wentzell 公式と Clark–Ocone 公式を用い, この点を厳密に扱った. 原資産を $\mathrm{d}S_t = S_t\sqrt{V_t}\,\mathrm{d}B_t$, B は Brown 運動とし, IV の満期までの総分散を $\Sigma_t(K) = (T-t)\widehat{\sigma}_t(K,T)^2$ と置く. オプション価格面の正則性と $\log S_T$ の Malliavin 微分可能性などの条件のもとで, SSR は

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t(T) &= \frac{A_t(T)}{Y_t(T)}, \\ A_t(T) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{S_T<S_t\}} \frac{S_T}{S_t}\left(1 - \frac{\mathcal{D}_t \log S_T}{\sqrt{V_t}}\right)\right], \\ Y_t(T) &= \mathbb{Q}(S_T < S_t \mid \mathscr{F}_t) - \Phi\left(\frac{\sqrt{\Sigma_t(S_t)}}{2}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

と表される. Φ は標準正規分布関数, $\mathcal{D}_t$ は原資産を駆動する Brown 運動 B の時刻 t の変動が終値に及ぼす感応度を表す Malliavin 微分である. 分母がゼロでないことを仮定する. この表示は, ATM IV を別の量で置き換えずに, 終値の分布とその感応度から SSR を解析する出発点となる.

分散過程を

$$V_t = \xi_0(t) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{m} \int_0^t K_i(t-s)\mathrm{d}W_s^i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_0^t K_i(t-s)^2 \mathrm{d}s \right\} \tag{9}$$

と定義する Bergomi 型モデルを考える. ここで $\xi_0(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_t]$ は正の決定論的な連続関数である初期先渡分散曲線であり, $W^1, \ldots, W^m$ は互いに独立な Brown 運動で, 原資産を駆動する B とは $\mathrm{d}\langle B, W^i\rangle_t = \rho_i \mathrm{d}t$ の相関を持つ.

カーネルの局所二乗可積分性と, 相関についての $\sum_i \rho_i^2 < 1$ などの条件のもとで, 上記の表示に必要な正則性も検証できる. さらに $G(u) = \sum_i \rho_i K_i(u)$ が $u \downarrow 0$ で $c\,u^{H-1/2}$ に漸近し, $c \neq 0$, $0 < H \leq 1/2$ なら

$$\lim_{T \downarrow t} \mathcal{R}_t(T) = H + \frac{3}{2} \tag{10}$$

となる. ここで $H - 1/2$ は, 短期 ATM スキューの残存期間に関するべき乗則の指数となる. 1 因子で $K_1(u) = \eta u^{H-1/2}$, $\eta > 0$, $0 < H < 1/2$ とする場合が, ラフ Bergomi モデルの典型例である. この極限は先行研究 [2] でも議論されており, 本研究では正則性の検証を伴う表示公式から厳密に導いている.

同論文では, カーネルを εK_i に置き換えた小さな vol-of-vol の極限も扱う. 初期先渡分散が一定なら, 時刻 0 で

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{R}_0^{\varepsilon}(T) = \frac{T \int_0^T G(u)\mathrm{d}u}{\int_0^T (T-u)G(u)\mathrm{d}u} \tag{11}$$

となる. ただし分母はゼロでないとする. この公式も Bergomi が形式的に導いたものを厳密に証明した結果である. 純粋なべき型 $G(u) = cu^{H-1/2}$ なら右辺は $H + 3/2$ である.

3.2 時間依存する局所ボラティリティでの極限 2

論文 [4] は, $\mathrm{d}S_u = a(S_u, u)\mathrm{d}B_u$, $v(s,u) = a(s,u)/s$ という局所ボラティリティモデルを扱う. 局所的な滑らかさと正値性, a_s の大域的な有界性, および解が正に保たれることなどを仮定する. 現在の原資産価格を $s = S_t$ とし, $v_s(s,t) \neq 0$ なら

$$\lim_{T \downarrow t} \mathcal{R}_t(T) = 2 \tag{12}$$

を得る. Bergomi の時間一様な場合の対称性による議論を, 一般の時間依存するモデルで厳密化した結果である. 証明では一次の渡辺展開を用いる.

3.3 株価指数をバスケットとして扱う

SPX のような株価指数は多数の銘柄からなる. したがって, 一つの資産の分散モデルから得た結論が, 構成銘柄を集約した指数にも成立するかを確認する必要がある. 前田氏, 荻原氏との共著論文 [5] では, 連続な確率ボラティリティを持つ資産のバスケットを扱った.

構成資産価格を S_t^i, バスケットを $S_t = \sum_i S_t^i$, 時価構成比率を $\Pi_t^i = S_t^i / S_t$ とする. 各資産の瞬間分散を V_t^i, リターンの相関を ρ^{ij} とすると, バスケットの瞬間分散は

$$V_t = \sum_{i,j} \Pi_t^i \Pi_t^j \sqrt{V_t^i V_t^j}\, \rho^{ij} \tag{13}$$

となる. この分散は, 構成資産の分散が動くことに加え, 株価の相対的な変動によって構成比率 Π_t^i が動くことでも変化する. 後者は, 各銘柄の分散を固定しても残る効果である.

論文では, この二つの寄与を分けた満期近傍の IV 展開を導いた. さらに Bergomi 型を拡張した Gauss ファクターモデルでは, 必要な成長条件, 正則性と非退化性のもとで密度展開を示し, ATM での微分を正当化している. 残存期間を θ, ボラティリティの短時間スケールを $r(\theta)$ とすると, ATM スキューは

$$\partial_k \sigma(0,\theta) = \frac{\psi_A}{2H+3} \frac{r(\theta)}{\sqrt{\theta}} + \frac{\psi_B}{4} + o\!\left(\frac{r(\theta)}{\sqrt{\theta}} + 1\right) \tag{14}$$

と展開される. $r(\theta)$ は指数 H の正則変動関数であり, 純粋なべき型なら θ^H である. ψ_A は構成資産のボラティリティ変動, ψ_B は構成比率変動から生じる係数である. $H < 1/2$ で $\psi_A \neq 0$ なら前者が主要項となる. 一方, $H = 1/2$ では $r(\theta)/\sqrt{\theta}$ は緩変動関数となり, 一般には一定値へ収束するとは限らない. 純粋なべき型なら両者は同じ次数となるが, 一般の場合も含めて展開には両方の寄与を残す必要がある.

同じ Gauss ファクターモデルについて, Malliavin 表示を用いて SSR も解析した. $H < 1/2$ での主要係数の非消失, $H = 1/2$ での両寄与の非相殺などを仮定すると, バスケットでも短期 SSR は $H + 3/2$ へ収束する. 相関や構成比率がスキューの大きさに影響しても, 条件を満たす範囲では SSR の極限に共通の構造が残る. これは, 単一資産の理論を指数オプションへつなぐ結果である.

4　SPX データと推定方法

4.1　観測時刻と IV の計算

Cboe DataShop の Option EOD Summary[7] に含まれる 2022 年 1 月 3 日〜2025 年 12 月 31 日の 48 か月, 1,003 営業日を対象とする. SPX の AM 決済契約と SPXW の PM 決済契約を用い, 現地時刻 15 時 45 分の最良売買気配の仲値を価格とする. 短縮取引日は仕様に従い 12 時 45 分を用いる. 原資産も同じスナップショットのビッド・アスク中間値を用いる.

満期時刻を AM 決済では 9 時 30 分, PM 決済では現物市場の終了時刻とし, 夏時間と短縮取引日を考慮する. 対となるコール・プットの仲値にパリティ $C - P = D(F - K)$ を当てはめ, 先渡価格 F と割引係数 D を同時に推定する. 気配幅を用いて重み付けし, 気配幅で規格化したパリティ残差の大きい観測の重みを下げながら反復推定する. 得られた F, D で Black 公式を反転する. 付属のベンダー IV をそのまま採用した計算ではない.

各日・決済区分・満期について, $K \le F$ のプットと $K > F$ のコールを使い, $|\log(K/F)| \le 0.04$ で IV を定数項と $\log(K/F)$ に線形回帰する. 切片を ATM IV, 傾きをスキューの推定値とする. 理論の節では金利・配当ゼロのスポット ATM を用いたが, 実証では先渡 ATM を採用している. 局所線形フィットは ATM 微分そのものではなく, 有限幅による近似である. ATM・スキューの推定は各観測日時点で残存日数 1 日以上 365 日未満の契約を対象とし, 連続する両営業日で推定値が得られた同じ満期・決済区分の観測を結ぶ. 有効な連続営業日の組は, 全体で 46,452 件となった.

再現性のため, 主な採用基準を付記する. オプションのビッドは 0.05 以上, 仲値は 1 以上とし, 気配差が仲値の 50%を超えるものを除外した. パリティの推定では $|\log(K/S_t)| \le 0.12$ の範囲内の 8 組以上のコール・プットと, 原資産価格の 2.5%以上の権利行使価格幅を要求した. 推定金利・配当率と気配差で規格化したパリティ残差にも制約を置く. IV の局所回帰には 6 本以上, ATM の両側各 2 本以上を要求し, IV 残差の二乗平均平方根が 0.03 を超えるものを除いた. これらは本稿の計算上の選択であり, SSR の定義そのものではない.

4.2　残存日数方向の Rolling Window

同じ満期・決済区分について連続する営業日を結び, 原資産の対数リターン $r_t = \log(S_t/S_{t-1})$ と ATM IV 変化 $\Delta\sigma^A_{t,T}$ を計算する. 年末年始も連続営業日として接続する. 目標残存日数 $d = 3, 4, \ldots, 365$ ごとに, 前営業日時点の残存日数が $[d-7, d+7]$ に入る観測を集め,

$$\Delta\sigma^A_{t,T} = \alpha_d + R_d\big(\widehat{\psi}_{t-1,T} r_t\big) + \gamma_d \Delta c_t + \varepsilon_{t,T} \tag{15}$$

を最小二乗法で推定する. Δc_t は前営業日からの暦日数で, 満期接近による平均的な IV 変化を調整する. スキューの時変性を反映した R_d が本稿の SSR 推定値である. スキューを一定とみなせる窓では, 同じ切片と暦日数の調整項を入れて ATM IV 変化をリターンで回帰し, そのリターンの係数をスキューで割る計算と一致する.

窓は $[\max(1, d-7), \min(365, d+7)]$ とし, 異なる観測日が 30 営業日以上あることを採用条件とする. 残存日数 3〜365 日のすべての推定窓で, 観測日の数は採用基準の 30 営業日を上回り, 最も少ない窓でも 305 営業日となった. 全期間の推定は, 年別 SSR の単純平均ではなく, 各日・各満期・各決済区分の IV 変化をそれぞれ 1 観測として, 4 年間のデータをまとめて行う回帰である.

区間推定には, Politis and Romano（1992）の循環ブロック・ブートストラップ [6] を用いる. 5 営業日のブロックを標本の末尾から先頭へ折り返すことも許して再抽出し, 1,500 回の反復から各点の 95%区間を計算する. 同じ日に属するすべての満期を一緒に再抽出し, 満期間の共通変動を反映させた. ただし, 本稿の回帰へのこの方法の適用が理論的に保証されるかは明らかでなく, これらの区間はあくまで参考情報として示す. 図の帯は各点の区間であり, 曲線全体を覆う同時信頼帯ではない.

5　推定された SSR の期間構造

図 1 左は 4 年間をまとめた推定値, 右は同じ方法による年別の点推定である. 全期間では短期側の約 1.6 から, 長期側の約 1.1〜1.3 へ低下する形となった. 例えば 7 日を中心とする窓で 1.65, 30 日で 1.56, 180 日で 1.30, 365 日

で 1.13 である．365 日の窓は 358〜365 日なので，端では左右対称の窓ではない．これらは日次変化と有限幅の窓に基づく回帰の結果であり，理論上のゼロ満期極限を直接推定したものではないことを注意しておく．

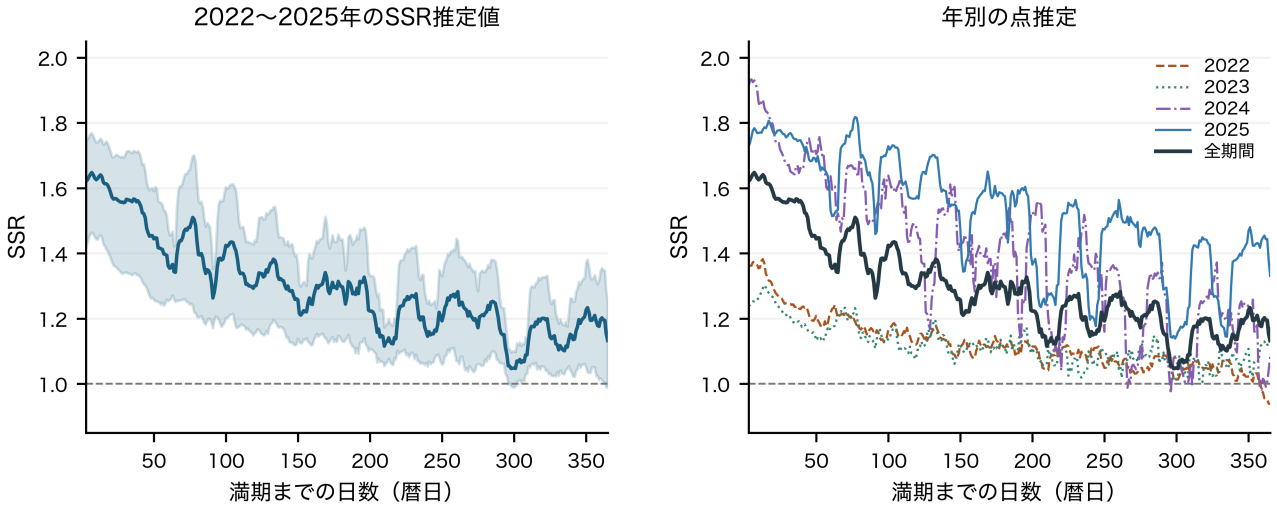

図 1: SPX の SSR 期間構造．2022〜2025 年，残存日数方向に前後 7 暦日の窓を 1 日ずつ移動．左の帯はブートストラップによる各点の 95%区間（参考情報），右の細線は年別の点推定．

表 1: 目標残存日数ごとの SSR 点推定．各列は当該日数を中心とした Rolling Window の値．

対象期間	7 日	30 日	90 日	180 日	365 日
2022 年	1.37	1.25	1.16	1.11	0.94
2023 年	1.25	1.21	1.13	1.11	1.18
2024 年	1.93	1.67	1.51	1.46	1.08
2025 年	1.78	1.76	1.56	1.58	1.33
全期間	1.65	1.56	1.31	1.30	1.13

市場価格に較正したモデルが，この SSR の期間構造をどの程度再現するかの検証は，今後の課題である．

参考文献

[1] Bergomi, L. (2016). *Stochastic Volatility Modeling*. CRC Press, Sections 2.5.1–2.5.3.

[2] Friz, P. K. and Gatheral, J. (2025). Computing the SSR. *Quantitative Finance*, 25, 701–710. arXiv:2406.16131.

[3] Fukasawa, M. (2026). On the Skew Stickiness Ratio. arXiv:2602.05241v2（2026 年 6 月 8 日版）.

[4] Fukasawa, M. (2026). Short-maturity skew stickiness ratio under local volatility. arXiv:2609.11586v1.

[5] Fukasawa, M., Maeda, J. and Ogiwara, T. (2026). Basket implied volatility skew and stickiness. arXiv:2609.38230v1.

[6] Politis, D. N. and Romano, J. P. (1992). A circular block-resampling procedure for stationary data. In R. LePage and L. Billard (eds.), *Exploring the Limits of Bootstrap*, Wiley, pp. 263–270.

[7] Cboe DataShop. Option EOD Summary, File Specification v1.1. データ仕様書（2026 年 11 月 5 日参照）.

本資料に関する著作権は，株式会社大阪取引所にあります．

本資料の一部又は全部を無断で転用，複製することはできません．

本資料の内容は，株式会社日本取引所グループおよびグループ各社（株式会社東京証券取引所，株式会社大阪取引所，株式会社東京商品取引所，株式会社ＪＰＸ総研，日本取引所自主規制法人および日本証券クリアリング機構）の意見・見解を示すものではありません．

本資料は，デリバティブ商品の取引の勧誘を目的としたものではありません．

筆者，株式会社日本取引所グループおよび上記グループ各社は，本資料に基づく投資あるいは類似の行為により発生した如何なる損失や損害に対して，一切の責任を負うものではありません．